Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 13/14

2. Probeklausur TheGI 3 (Lösungen)

12. Februar 2014

Name, Vorname: ______________________________

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): ______________________________

Versuch-Nr.: ______________ Matrikel-Nr.: ______________

Los-Nr.: [ ]

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe: **Note:**

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 65 Punkte zu erreichen. Die Teilleistung gilt mit dem Erreichen von mindestens 50% der Punkte als bestanden.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.
Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Diese Seite ist leer.

Aufgabe 1 5 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 0 Punkte. Jede leere Anwort gibt 0,5 Punkte.

Sei $\sigma = \{c, f\}$ eine Signatur mit einer Konstanten c und einem 1-stelligen Funktionssymbol f und sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ beliebig.

	Aussage	Wahr	Falsch
1.	$\varphi \vee \neg\varphi$ ist erfüllbar.	⊗	○
2.	Das Allgemeingültigkeitsproblem der Prädikatenlogik ist entscheidbar.	○	⊗
3.	Isomorphe σ-Strukturen haben gleichmächtige Universen.	⊗	○
4.	Es gibt unendlich viele variablenfreie σ-Terme.	⊗	○
5.	$\exists x f(x) = c$ ist eine prädikatenlogische Formel.	⊗	○

Aufgabe 2 10 Punkte

Sei $\mathcal{M} = (\{0,1\} \times \mathbb{N}, <^{\mathcal{M}})$, wobei für alle $(i,n), (i',n') \in \{0,1\} \times \mathbb{N}$ gilt, dass

$$(i,n) <^{\mathcal{M}} (i',n') \quad \text{genau dann, wenn } i < i' \text{ oder wenn } i = i' \text{ und } n < n' \text{ gilt.}$$

Definieren Sie eine Struktur $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <^{\mathcal{N}})$, sodass $\mathcal{M}$ isomorph zu $\mathcal{N}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 2

Für $n, n' \in \mathbb{N}$ definieren wir, dass $n <^{\mathcal{N}} n'$ gilt genau dann, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(i) n ist gerade und n' ist ungerade.

(ii) n und n' sind beide gerade und $n < n'$.

(iii) n und n' sind beide ungerade und $n < n'$.

Dann ist $f : \{0,1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} f(0,n) &:= 2n \\ f(1,n) &:= 2n+1 \end{aligned}$$

ein Isomorphismus zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$. Offensichtlich ist f bijektiv und $(i,n) <^{\mathcal{M}} (i',n')$ genau dann, wenn $f(i,n) <^{\mathcal{N}} f(i',n')$.

Aufgabe 3 10 Punkte

Sei $\sigma = \{f\}$, wobei f ein einstelliges Funktionssymbol ist. Geben Sie einen erfüllbaren Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\sigma)$ an, sodass alle Modelle von φ unendlich sind.

Lösung zu Aufgabe 3

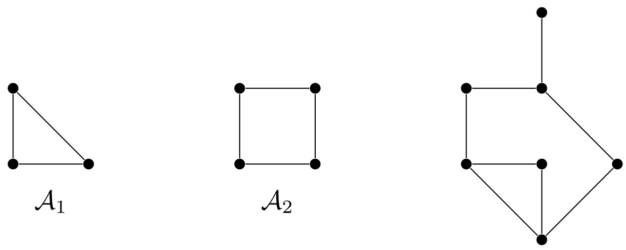
Wir definieren

$$\varphi := \underbrace{\forall y \exists x f(x) = y}_{f \text{ ist surjektiv}} \wedge \underbrace{\exists x \exists y (x \neq y \wedge f(x) = f(y))}_{f \text{ ist nicht injektiv}}.$$

Dieser Satz ist erfüllbar, zum Beispiel durch die Struktur $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen mit $f^{\mathbb{N}}(n) := \max(n-1, 0)$. Der Satz ist jedoch nicht erfüllbar von einer endlichen Struktur, denn eine surjektive Funktion zwischen zwei gleich großen endlichen Mengen ist immer auch injektiv.

Aufgabe 4 10 Punkte

(i) Gegeben sind die folgenden Strukturen $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ und prädikatenlogischen Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Entscheiden Sie für $1 \leq i, j \leq 3$, ob $\mathcal{A}_i \models \varphi_j$ gilt.



$\mathcal{A}_1$ $\mathcal{A}_2$ $\mathcal{A}_3$

- $\varphi_1 = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \exists x_5 (E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge E(x_3, x_4) \wedge E(x_4, x_5) \wedge E(x_5, x_1))$.
- $\varphi_2 = \forall x \exists y_1 \exists y_2 \forall y_3 (y_1 \neq y_2 \wedge E(x, y_1) \wedge E(x, y_2) \wedge ((y_3 \neq y_1 \wedge y_3 \neq y_2) \rightarrow \neg E(x, y_3)))$.
- $\varphi_3 = \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow E(x, y))$.

Sie müssen Ihre Antwort in dieser Teilaufgabe nicht begründen.

(ii) Gegeben sind die folgenden Strukturen $\mathcal{B}_1 = (\mathbb{N}, +, \cdot)$, $\mathcal{B}_2 = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $\mathcal{B}_3 = (\mathbb{C}, +, \cdot)$, wobei $+, \cdot$ 2-stellige Funktionssymbole mit den üblichen Interpretationen auf den entsprechenden Strukturen sind. Geben Sie Formeln ψ_1, ψ_2, ψ_3 an, sodass gilt $\mathcal{B}_i \models \psi_j$ genau dann, wenn $i = j$.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung zu Aufgabe 4

(i)
- φ_1 gilt in jedem Graphen, der ein Dreieck oder einen Kreis der Länge 5 enthält, also in $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_3$.
- φ_2 gilt in jedem 2-regulären Graphen, also in $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$.
- φ_3 gilt in jedem vollständigen Graphen, also nur in $\mathcal{A}_1$.

(ii)
- $\psi_1 = \exists x \forall y \neg(x + x + y = x)$. Nur in $\mathcal{B}_1$ existieren Elemente, die kein additives Inverses haben.
- $\psi_2 = \neg\psi_1 \wedge \exists x \forall y \neg(y \cdot y = x)$. Der Satz $\neg\psi_1$ unterscheidet $\mathcal{B}_1$ von $\mathcal{B}_2$ und um $\mathcal{B}_2$ von $\mathcal{B}_3$ zu unterscheiden, benutzen wir, dass in $\mathcal{B}_2$ nicht jedes Element eine Wurzel besitzt.
- $\psi_3 = \forall x \exists y (y \cdot y = x)$. Nur in $\mathcal{B}_3$ hat jedes Element eine Wurzel.

Aufgabe 5 10 Punkte

Sei $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot)$ die Struktur der natürlichen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Geben Sie für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ Formeln φ_i an, sodass gilt:

(i) $\varphi_1(\mathcal{N})$ ist die Menge der Quadratzahlen.

(ii) $\varphi_2(\mathcal{N})$ ist die Menge der Paare (x, x^2) mit $x \in \mathbb{N}$.

(iii) $\varphi_3(\mathcal{N})$ ist die Menge der Zahlen, die größer als 10 sind.

Lösung zu Aufgabe 5

Hier gibt es viele Möglichkeiten. Eine ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{null}(x) &= x + x = x && \text{„}x \text{ ist } 0\text{“}\\
\mathrm{eins}(x) &= x \cdot x = x \wedge x + x \neq x && \text{„}x \text{ ist } 1\text{“}\\
\varphi_1(x) &= \exists y (y \cdot y = x)\\
\varphi_2(x, y) &= x \cdot x = y\\
\varphi_3(x) &= \neg\mathrm{null}(x) \wedge \exists e \left(\mathrm{eins}(e) \wedge \bigwedge_{i=1}^{10} x \neq \underbrace{e + e + \cdots + e}_{i \text{ mal}} \right)
\end{aligned}$$

φ_3 sagt „$x \neq 0$ und $x \neq 1$ und $x \neq 2$ und … und $x \neq 10$“. Damit ist x größer als 10.

Aufgabe 6 10 Punkte

Sei $\sigma = \{E\}$ die Signatur der Graphen. Wir betrachten die Strukturen

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (A, E^{\mathcal{A}}) & \mathcal{B} &= (B, E^{\mathcal{B}})\\
A &:= \mathbb{N} & B &:= \{0,1\} \times \mathbb{N}\\
E^{\mathcal{A}} &:= \big\{(x, y) \in A^2 \mid x < y\big\} & E^{\mathcal{B}} &:= \big\{((i, x), (j, y)) \in B^2 \mid i < j \text{ oder } (i = j \text{ und } x < y)\big\}\,.
\end{aligned}$$

Welcher Spieler gewinnt $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ und mit welcher Strategie? Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ isomorph?

Lösung zu Aufgabe 6

Herausforderer gewinnt in 3 Zügen.

(i) In der ersten Runde spielt er auf $b_0 := (1, 0) \in \mathcal{B}$. Duplikatorin antwortet auf $a_0 \in \mathcal{A}$.

(ii) Falls $a_0 = 0$, dann spielt Herausforderer auf $b_1 := (0, 0) \in \mathcal{B}$ und hat gewonnen.

Falls $a_0 > 0$, dann spielt Herausforderer auf $a_1 := a_0 - 1 \in \mathcal{A}$. Duplikatorin antwortet auf $b_1 := (0, x) \in \mathcal{B}$.

(iii) Herausforderer spielt auf $b_2 := (0, x + 1) \in \mathcal{B}$ und hat gewonnen, weil $b_1 < b_2 < b_0$ gilt, es aber in $\mathcal{A}$ kein Element zwischen $a_1 = a_0 - 1$ und a_0 gibt.

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ sind nicht isomorph, weil Herausforderer $\mathfrak{G}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ gewinnt.

Aufgabe 7 10 Punkte

Wir betrachten die Signatur $\sigma = \{f, c\}$ mit einem 1-stelligen Funktionssymbol f und einem Konstantensymbol c. Beweisen Sie mit dem Sequenzenkalkül die Sequenz

$$\{\forall x\ f(x) = x\} \ \Rightarrow\ \{f(f(c)) = c\}\,.$$

Beachten Sie bitte: Falls Sie eine der Substitutionsregeln ($S\Rightarrow$) oder ($\Rightarrow S$) verwenden, müssen Sie angeben, was $\psi(x)$, t und t' im Kontext dieser Regel sind.

Lösung zu Aufgabe 7

$$
\begin{array}{rc}
 & \overline{\{f(c)=c\} \Rightarrow \{f(c)=c\}} \\
(\Rightarrow S) & \overline{\{f(c)=c\} \Rightarrow \{f(f(c))=c\}} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\{\forall x f(x)=x\} \Rightarrow \{f(f(c))=c\}}
\end{array}
\quad \text{mit } \psi(x) := (f(x)=c),\ t := c,\ t' := f(c)
$$

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$(\neg\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\neg)\ \dfrac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$

$(\wedge\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\wedge)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$

$(\vee\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\vee)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$

$(\rightarrow\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$

$(\forall\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x\psi(x) \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow\forall)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x\psi(x)}\ (*)$

$(\exists\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x\psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*)$ $\qquad$ $(\Rightarrow\exists)\ \dfrac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\psi(x)}$

$(S\Rightarrow)\ \dfrac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta}$ $\qquad$ $(\Rightarrow S)\ \dfrac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$ $\qquad$ $(=)\ \dfrac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.