Prof. Dr. Stephan Kreutzer
FG Logik und Semantik
Technische Universität Berlin

WS 15/16

Probeklausur 3

Name, Vorname: ____________________

Studiengang (Bsc/Msc/Dipl Inf/Math/...): ____________________

Versuch-Nr.: ____________________ Matrikel-Nr.: ____________________

Los-Nr.:

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7
Punkte:							

Summe:

Punkte: Insgesamt sind in dieser Teilleistung 90 Punkte zu erreichen.
Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 75 Minuten. Zusätzlich gibt es eine Einlesezeit von 15 Minuten.
Form der Abgabe: Bitte lassen Sie Ihr bereitgestelltes Papier geklammert.
Hilfsmittel: Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Für die Antworten darf nur das bereitgestellte Papier verwendet werden.
Los-Nummer: Tragen Sie in das Feld „Los-Nr.“ die Ihnen ausgeteilte Nummer ein. Unter dieser Nummer finden Sie später Ihre erreichten Punkte und Ihre Note.

Aufgabe 1 10 Punkte

Bitte kreuzen Sie bei den folgenden Aussagen jeweils an, ob die Aussage stimmt oder ob sie nicht stimmt.

Jede richtige Antwort gibt 1 Punkt, jede falsche Antwort 1 Punkt Abzug. Jede leere Anwort gibt 0 Punkte. Sie können in dieser Aufgabe nicht weniger als 0 Punkte erhalten.

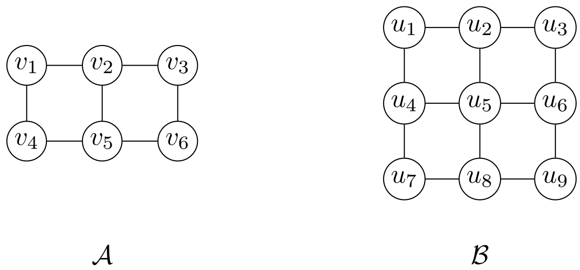
Sei σ eine beliebige endliche Signatur, die mindestens ein Konstantensymbol c enthält. Sei $\varphi \in \mathrm{FO}[\sigma]$ ein Satz, $\psi(x, y) \in \mathrm{FO}[\sigma]$ eine Formel und $\Phi, \Delta \subseteq \mathrm{FO}[\sigma]$ Mengen von Sätzen.

Wie üblich lassen wir Klammern in Formeln weg, solange es eine eindeutige Lesung gibt.

		Wahr	Falsch
1.	$x = y = z \in \mathrm{FO}[\sigma]$.	○	⊗
2.	$\forall x \exists y \, (x \neq y \to x = y)$ ist allgemeingültig.	⊗	○
3.	$\forall x \neg \exists y \; y = c$ ist erfüllbar.	○	⊗
4.	$\mathcal{A} \models \varphi$ für eine σ-Struktur $\mathcal{A}$ impliziert, dass $\neg\varphi$ unerfüllbar ist.	○	⊗
5.	Wenn $\Phi \Rightarrow \Delta$ gültig ist und $\frac{\Phi' \Rightarrow \Delta'}{\Phi \Rightarrow \Delta}$ eine korrekte Regel ist, dann ist auch $\Phi' \Rightarrow \Delta'$ gültig.	○	⊗
6.	Jeder surjektive Homomorphismus ist umkehrbar.	○	⊗
7.	Es kann auch dann eine trennende Formel geben, wenn Duplikatorin das Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel gewinnt.	○	⊗
8.	$\{\varphi\} \Rightarrow \{\psi\}$ ist gültig genau dann, wenn $\varphi \to \psi$ allgemeingültig ist.	⊗	○
9.	Das Erfüllbarkeitsproblem der Prädikatenlogik kann in Polynomialzeit entschieden werden.	○	⊗
10.	Es gibt eine Formel φ, so dass $\mathcal{A} \models \varphi$ genau dann, wenn das Universum von $\mathcal{A}$ endlich ist.	○	⊗

Aufgabe 2 12 Punkte

Sei $\sigma := \{E\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol. Wir betrachten die folgenden beiden schlaufenfreien Graphen mit ungerichteten Kanten.



Geben Sie eine Gewinnstrategie für Herausforderer im Spiel $\mathcal{G}_4(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ mit an. Geben Sie außerdem eine trennende Formel mit Quantorenrang 4 an.

Begründen Sie Ihre Antworten.

Lösung zu Aufgabe 2

Herausforderer spielt auf 4 paarweise nicht benachbarte Knoten in $\mathcal{B}$, zum Beispiel auf u_1, u_3, u_7, u_9. In $\mathcal{A}$ gibt es keine 4 paarweise nicht benachbarten Knoten, also gewinnt Herausforderer.

Eine trennende Formel ist

$$\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \bigwedge_{i=1}^{4} \bigwedge_{j=i+1}^{4} (x_i \neq x_j \wedge \neg E(x_i, x_j)).$$

Aufgabe 3 2+17=19 Punkte

(i) Definieren Sie, wann eine Regel im prädikatenlogischen Sequenzenkalkül korrekt ist.

(ii) Beweisen Sie mit dem prädikatenlogischen Sequenzenkalkül, dass konstante Funktionen überall denselben Wert annehmen. Das heißt, zeigen Sie die Gültigkeit der Sequenz

$$\exists y \forall x \, f(x) = y \Rightarrow \forall x \forall y \, f(x) = f(y).$$

Bitte bedenken Sie, dass Sie im Sequenzenkalkül pro Ableitungsschritt nur eine Regel anwenden dürfen. Bitte geben Sie in jedem Schritt den Namen der angewendeten Regel an.

Falls Sie eine der Substitutionsregeln ($S\Rightarrow$) oder ($\Rightarrow S$) verwenden, dann geben Sie bitte an, was $\psi(x)$ im Kontext dieser Regel ist.

Lösung zu Aufgabe 3

(i) Eine Regel ist korrekt, wenn die Gültigkeit der oberen Sequenz (der Prämisse) die Gültigkeit der unteren Sequenz (der Konsequenz) impliziert.

(ii) Ein Beweisbaum für die angegebene Sequenz ist der folgende.

$$
\begin{array}{rccc}
 & \overline{f(a) = c} & \overline{\Rightarrow} & \overline{f(a) = c} \quad \text{mit } \psi(x) := f(a) = x \\
(\Rightarrow S) & \overline{f(a) = c, f(b) = c} & \Rightarrow & \overline{f(a) = f(b)} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\forall x\, f(x) = c, f(a) = c} & \Rightarrow & \overline{f(a) = f(b)} \\
(\forall\Rightarrow) & \overline{\forall x\, f(x) = c} & \Rightarrow & \overline{f(a) = f(b)} \\
(\Rightarrow\forall) & \overline{\forall x\, f(x) = c} & \Rightarrow & \overline{\forall y\, f(a) = f(y)} \\
(\Rightarrow\forall) & \overline{\forall x\, f(x) = c} & \Rightarrow & \overline{\forall x \forall y\, f(x) = f(y)} \\
(\exists\Rightarrow) & \exists y \forall x\, f(x) = y & \Rightarrow & \forall x \forall y\, f(x) = f(y)
\end{array}
$$

Aufgabe 4 12 Punkte

Zeigen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Regel.

$$\frac{\Phi, \forall x\ \varphi(x) \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x\ \neg\varphi(x)}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Die Regel ist korrekt.

Angenommen die obere Sequenz ist gültig. Wir zeigen, dass die untere Sequenz gültig ist.

Sei $\mathcal{I}$ eine Interpretation mit $\mathcal{I} \models \Phi$. Falls $\mathcal{I} \models \exists x\ \neg\varphi(x)$ gilt, dann sind wir fertig. Angenommen das ist nicht der Fall.

Aus $\mathcal{I} \not\models \exists x\ \neg\varphi(x)$ folgt, dass es kein Element a gibt mit $\mathcal{I}[x/a] \models \neg\varphi(x)$. Anders gesagt, für alle Elemente a gilt $\mathcal{I}[x/a] \models \varphi(x)$. Also gilt $\mathcal{I} \models \forall x\ \varphi(x)$.

Damit ist die Voraussetzung der oberen Sequenz erfüllt. Weil die obere Sequenz gültig ist, gibt es ein $\delta \in \Delta$ mit $\mathcal{I} \models \delta$, also ist die untere Sequenz gültig.

Aufgabe 5 5+5+5=15 Punkte

Sei $\sigma = \{0, 1, +, \cdot, R\}$ eine Signatur mit zwei Konstantensymbolen, zwei 2-stelligen Funktionssymbolen $+, \cdot$ und einem 1-stelligen Relationssymbol R.

Sei $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, 0^{\mathbb{C}}, 1^{\mathbb{C}}, +^{\mathcal{C}}, \cdot^{\mathcal{C}}, R^{\mathcal{C}})$ die Struktur der komplexen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation und $R^{\mathcal{C}} := \mathbb{R}$. Geben Sie Formeln $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ an, sodass gilt

(i) $\varphi_1(\mathcal{C}) = \{i, -i\}$,

(ii) $\varphi_2(\mathcal{C}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

(iii) $\varphi_3(\mathcal{C}) = \{a + (b \cdot i) \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ und } a \geq 0\}$.

Dabei ist i die imaginäre Einheit in $\mathbb{C}$. Sie müssen Ihre Antworten in dieser Aufgabe nicht begründen. Sie dürfen in φ_i die Formeln $\{\varphi_j \mid j < i\}$ verwenden.

Lösung zu Aufgabe 5

(i) $\varphi_1(x) := (x \cdot x) + 1 = 0$.

(ii) $\varphi_2(x) := \exists y\ (R(y) \wedge y \cdot y = x)$.

(iii) $\varphi_3(x) := \exists a \exists b \exists i \big(\varphi_2(a) \wedge R(b) \wedge \varphi_1(i) \wedge a + (b \cdot i) = x\big)$.

Aufgabe 6 10 Punkte

Sei $\sigma := \{\leq\}$ eine Signatur mit einem 2-stelligen Relationssymbol. Sei $\mathcal{C}$ die Klasse der partiellen Ordnungen ohne minimale und ohne maximale Elemente.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ in der Klasse der partiellen Ordnungen endlich axiomatisierbar ist.

Lösung zu Aufgabe 6

Wir definieren

$$\varphi := \forall x \Big(\exists y\ (y \neq x \wedge y \leq x) \wedge \exists y\ (y \neq x \wedge x \leq y)\Big).$$

Dann axiomatisiert $\{\varphi\}$ die Klasse $\mathcal{C}$ (in der Klasse der partiellen Ordnungen!).

Aufgabe 7 12 Punkte

Sei $\sigma := \{E\}$, wobei E ein zweistelliges Relationssymbol ist. Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur. Geben Sie eine Formel $\psi_{\mathcal{A}}$ an, so dass für jede σ-Struktur $\mathcal{B}$ gilt

$$\mathcal{B} \models \psi_{\mathcal{A}} \quad \iff \quad \text{Duplikatorin gewinnt das Spiel } \mathfrak{G}_2(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Lösung zu Aufgabe 7

Allgemein definieren die Hintikka-Formeln den Sieger des Spiels. Diese sind induktiv wie folgt definiert. Sei σ eine Signatur und sei $k \in \mathbb{N}$. Sei ferner $\mathcal{A}$ eine σ-Struktur, $\overline{a} := a_1, \dots, a_k \in A^k$ und $\overline{x} := x_1, \dots, x_k$. Wir definieren

$$\varphi^0_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge \Big\{\psi(\overline{x})\colon \psi \text{ ist atomar oder negiert atomar und } \mathcal{A} \models \psi[\overline{a}]\Big\}$$

und für $m \geq 0$

$$\varphi^{m+1}_{\mathcal{A},\overline{a}}(\overline{x}) := \bigwedge_{a \in A} \exists x_{k+1} \varphi^{m}_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \wedge \forall x_{k+1} \bigvee_{a \in A} \varphi^{m}_{\mathcal{A},\overline{a},a}(\overline{x}, x_{k+1}) \, .$$

Falls $\overline{a}$ leer ist, so schreiben wir $\varphi^m_{\mathcal{A}}$. In dieser Formel sind alle Variablen quantifiziert und es gilt

$$\mathcal{B} \models \varphi^m_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \text{Duplikatorin gewinnt das Spiel } \mathfrak{G}_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}).$$

Für den Fall $m = 2$ kann diese Formel auch explizit angegeben werden. Dazu muss eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, welche Typen von Paaren von Elementen in $\mathcal{A}$ existieren und diese müssen durch eine Formel beschrieben werden.

Regeln des prädikatenlogischen Sequenzenkalküls

$$(\neg\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\neg)\ \frac{\Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\wedge\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi, \varphi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\wedge)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Phi \Rightarrow \Delta, \varphi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \varphi}$$

$$(\vee\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \vee \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\vee)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \psi}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Phi, \psi \Rightarrow \Delta}{\Phi, \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Phi, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi}{\Phi \Rightarrow \Delta, \varphi \rightarrow \psi}$$

$$(\forall\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\forall)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\ (*)$$

$$(\exists\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Phi, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\ (*) \qquad (\Rightarrow\exists)\ \frac{\Phi \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(S\Rightarrow)\ \frac{\Phi, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Phi, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Phi, \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Phi, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')} \qquad (=)\ \frac{\Phi, t = t \Rightarrow \Delta}{\Phi \Rightarrow \Delta}$$

$(*)$ wobei c ein nicht in Φ, Δ oder $\psi(x)$ vorkommendes Konstantensymbol ist.

In den Regeln steht t für einen beliebigen Term.