# THEGI 3 WS 2013/14

Gedächtnisprotokoll

13. Februar 2014

| |
|---|
| Bearbeitungszeit: 90 Minuten, Punkte: 90.<br>Mit 43 Punkten war die Klausur bestanden.<br>Sie zählt 40% zur Endnote |

## Aufgabe 1

10 Punkte

Je Frage gab es 1 Punkt oder 0.5 für keine Antwort.

1. $(X \wedge Y) \Rightarrow (X \vee Y)$ ist allgemeingültig
2. $(X \vee Y) \Rightarrow (X \wedge Y)$ ist erfüllbar
3. Die Negation einer unerfüllbaren Formel ist allgemeingültig
4. Es gibt eine erfüllbare Formel deren Negation erfüllbar ist
5. $\Phi \models \varphi$, dann gilt $var(\varphi) \subset var(\Phi)$
6. $\Phi \models \varphi$, dann ist $\phi$ erfüllbar
7. $\Phi$ erfüllbar $\Leftrightarrow$ eine endliche Teilmenge von $\Phi$ ist erfüllbar
8. Für jede TM M existiert eine Formel, die erfüllbar ist $\Leftrightarrow$ M akzeptiert das leere Wort
9. Jede entscheidbare Sprache ist in NP
10. SAT ist NP-vollständig

**Lösung:**

1. wahr
2. wahr
3. wahr
4. wahr
5. falsch
6. falsch
7. falsch
8. wahr
9. falsch

10. wahr

## Aufgabe 2

15 Punkte

Geben Sie eine Reduktion von $\epsilon$-Halteproblem auf das Universalproblem an.
$\epsilon$-HP: Hält eine gegebene TM auf dem leeren Wort.
UNI: Akzeptiert eine gegebene TM alle Eingaben.

**Lösung:**

Sei $f : \Sigma^* \Rightarrow \Sigma^*$ definiert durch folgende Vorschrift: Sei $w = enc(M)$ für eine TM M.
Dann def. $f(w) = enc(M')$, wobei M' folgende TM ist:
(1) simuliere M auf $\epsilon$
(2) Wenn M stoppt, akz.
Ist $w \neq enc(M) \forall$ TM M dann ist $f(w) = enc(M^*)$, wobei $M^*$ alles verwirft

zZ: $w \in$ e-HP $\Leftrightarrow f(w) \in Uni$
"$\Rightarrow$" : Sei $w \in HP$
Dann existiert eine TM M mit $w = enc(M)$ und M hält auf $\epsilon$.
Somit akzeptiert M' jede Eingabe.

"$\Leftarrow$" Sei $f(w) \in Uni$
Dann existiert eine TM M mit $w = enc(M)$ und M hält auf $\epsilon$.
Also ist $w \in$ e-HP Offensichtlich ist f berechenbar, also ist f eine Reduktion von e-HP auf Uni

## Aufgabe 3

15 Punkte

Beweise oder widerlege:

(a) $\forall \psi, \phi \in AL : \phi \models \psi \wedge \psi \models \phi \Rightarrow \phi \equiv \psi$

(b) $\forall \psi, \phi \in AL : \phi \models \psi \vee \psi \models \phi$

(c) $\forall \psi, \phi, \chi \in AL : \phi \models \psi \wedge \psi \models \chi \Rightarrow \phi \models \chi$

**Lösung:**

(a) Wahr
Beweis: Angenommen $\phi \models \psi$ und $\psi \models \phi$
Sei $\beta$ eine Belegung mit $\beta \models \phi$. Da $\phi \models \psi$ gilt auch $\beta \models \psi$.
Sei $\beta$ ' eine Belegung mit $\beta' \models \psi$. Da $\psi \models \phi$ gilt auch $\beta' \models \phi$.
Also $\beta \models \phi \Leftrightarrow \beta \models \psi \forall$ Belegung $\beta$ somit $\phi \equiv \psi$.

(b) Falsch.
Sei $\phi = X$ und $\psi = -X$
Dann gilt nicht $\phi \models \psi$, da für die Belegung $\beta$ mit $\beta(X) = 1$ und $\beta(Y) = 0$ gilt:
$\beta \models \phi$, $\beta \not\models \psi$ umgekehrt genauso.

(c) Beweis: Sei $\beta$ eine Belegung von $var(\phi)$ und $var(\chi)$, so dass $\beta \models \phi$
Da $\phi \models \psi$ gilt $\beta \models \psi$ da $\psi \models \chi$ folgt $\beta \models \chi$

## Aufgabe 4 9 Punkte

Beweise oder widerlege:

(a) $X \Rightarrow \bot \equiv \neg X$

(b) $X \wedge (Y \Rightarrow Z) = (X \wedge Y) \Rightarrow (X \wedge Z)$

(c) $X \wedge (X \wedge Y) = Y$

**Lösung:**

(a) wahr
$X \Rightarrow \bot \Leftrightarrow \neg X \vee \bot \Leftrightarrow \neg X$

(b) falsch
Sei $\beta; X, Y, Z \Rightarrow 0, 1$ eine Belegung mit $\beta(X) = 0$
Dann $[X \wedge (Y \Rightarrow Z)]^\beta = 0$ und $[(X \wedge Y) \Rightarrow (X \wedge Z)]^\beta = 1$

(c) falsch
Sei $\beta : X, Y \Rightarrow 0, 1$ eine Belegung mit $\beta(X) = 0, \beta(Y) = 1$
Dann gilt $[X \wedge (X \wedge Y)]^\beta = 0$ und $[Y]^\beta = 1$

## Aufgabe 5 16 Punkte

Sei $\Phi$ eine endliche Menge von aussagenlogischen Formeln und $\psi$ eine aussagenlogische Formel.

(a) i. Definiere $\Phi \models \psi$

ii. Erklären sie wie $\Phi \models \psi$ mit Resolution zu beweisen ist.

(b) Seien $C_1$ und $C_2$ aussagenlogische Klauseln.
Definiere: $C_1$ und $C_2$ können Resolviert werden. Was ist die Menge der Resolveten?

(c) Sei C eine C eine Resolvente von $C_1$ und $C_2$. Beweisen Sie, dass $C_1, C_2 \models C$

(d) Resolviere

$$(A \vee C) \wedge (\neg C \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee D) \wedge (D \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg D) \wedge (A \vee \neg D)$$

**Lösung:**

(a) i. $\Phi \models \psi$ bedeutet, dass für jede $\Phi \cup \psi$ passende Belegung $\beta$ gilt : $\beta \models \Phi$ impliziert $\beta \models \psi$.

ii. Formt man alle Formeln in $\Phi$ und $\neg\psi$ in KNF um und widerlegt die entstehende Klauselmenge mittels Resolution, so beweist man somit $\Phi \models \psi$

(b) $C_1$ und $C_2$ kann man resolvieren, falls es ein Literal L gibt, mit $L \in C_1$ und $\neg L \in C_2$.
$Res(C_1, C_2) = (C_1 \backslash L) \cup (C_2 \backslash \neg L) | L \in C_1, \neg L \in C_2$

(c) $C = (C_1 \backslash L) \cup (C_2 \backslash \neg L)$ für ein Literal L o.B.d.A. sei L positiv.
Sei $\beta$ eine Belegung mit $\beta \models C_1, C_2$, dann gilt $\beta \models C_1$ und $\beta \models C_2$
Fall 1: $\beta(L) = 1$, dann existiert $L' \in C_2$ mit $L' \neq \neg L$ und $\beta(L') = 1$, da $\beta \models C_2$. Dann $L' \in C$ und somit $\beta \models C$
Fall 2: $\beta(L) = 0$, dann existiert ein $L' \in C_1$ mit $L' \neq L$ und $\beta(L') = 1$, da $\beta \models C_1$. Dann $L' \in C$ und somit $\beta \models C$.

(d) geht

## Aufgabe 6 

15 Punkte

Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

(a) Geben sie eine AL-Formel $\phi$ an, so dass es genau eine Belegung $\beta\{X_1 \dots X_n\} \Rightarrow \{0,1\}$ gibt mit $\beta \models \phi$

(b) Geben sie eine AL-Formel $\phi$ mit $var(\phi) \in \{X_1 \dots X_n\}$ an, so dass es genau $2^{n-1}$ Belegung $\beta\{X_1 \dots X_n\} \Rightarrow \{0,1\}$ gibt mit $\beta \models \phi$

**Lösung:**

(a) $\phi = \wedge_{i=1}^{n} X_i$ ist nur unter der Belegung wahr, dass alle X wahr sind.

(b) $\phi = X_1$ ist wahr gdw $X_1$ wahr ist. Das ist genau bei der Hälfte aller Belegungen wahr. Insgesamt gibt es $2^n$ Belegungen und $2^n/2 = 2^{n-1}$

## Aufgabe 7 

10 Punkte

Betrachte einen unendlichen Graph $G = (V, E)$. Ein Graph G ist 2-KNOTENfärbbar, wenn es eine Funktion $c : V \Rightarrow \{0,1\}$ gibt, so dass $\forall\{u,v\} \in E : c(u) \neq c(v)$
Zeige: G ist 2-färbar $\Leftrightarrow$ alle endlichen Teilgraphen von G sind 2-färbar

**Lösung:**

Beweis:
Betrachte $\{X_v | v \in V\}$ und $\Phi = \{X_v \oplus X_w | \{v,w\} \in E\}$
Dann ist $\Phi$ erfüllt, genau dann wenn G 2-färbbar ist.

"$\Rightarrow$"
Sei G 2-färbbar. Dann existiert eine Funktion c wie in der Aufgabe beschrieben:
Sei G' = (V',E') ein beliebiger Untergraph von G.
Dann ist $c' : V' \Rightarrow \{0,1\}$ mit $c'(v) = c(v)$ eine 2-Färbungsfunktion von G'

"$\Leftarrow$"
Sein $\Phi' \subset \Phi$ endlich.
Sei $G' = (V', E')$ definiert durch $V' = \{v \in V | \exists w \in V \text{ mit } X_v \oplus X_w \in \Phi' \vee X_w \oplus X_v \in \Phi'\}$
$E' = E \cap (V'2)$.(alle 2-elementigen Teilmengen von V')
Dann ist G' ein Untergraph von G.

Da $\Phi'$ endlich ist, ist auch $G'$ endlich. Also ist $G'$ nach Voraussetzung 2-färbbar.
Sei $c'$ eine Färbungsfunktion von G'. Sei $\beta'$, eine Belegung die zu $\Phi'$ passt mit $\forall v \in V : \beta'(X_v) = 0$ falls $c'(v) = 0$
Dann ist $\beta' \models \Phi'$, also ist $\Phi'$ erfüllbar.
Nach KS ist somit $\Phi$ erfüllbar.
Sei $\beta : var(\Phi) \Rightarrow \{0,1\}$ eine erfüllende Belegung von $\Phi$. Definiere c durch $c(v) = 0$ falls $\beta(X_v) = 0$.
Dann ist c eine 2-färbungsfunktion für G

| Question: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Points: | 10 | 15 | 15 | 9 | 16 | 15 | 10 | 90 |
| Score: | | | | | | | | |

Notenverteilung:

| Punkte | Note |
|---|---|
| $<$43 | Nicht bestanden |
| ab 43 | 4,0 |
| ab 47,5 | 3,7 |
| ab 52 | 3,3 |
| ab 56,5 | 3,0 |
| ab 61 | 2,7 |
| ab 65,5 | 2,3 |
| ab 70 | 2,0 |
| ab 74,5 | 1,7 |
| ab 79 | 1,3 |
| ab 83,5 | 1,0 |