B. Mahr, S. Bab, T. Noll — WS 03/04

Nachklausur TheGI 3

06. April 2004

Name, Vorname: ____________________ Matr.-Nr.: ____________________

Übung im WS ________

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte:									

Summe: **Klausurnote:**

Punkte: Insgesamt sind in der Klausur 55 Punkte zu erreichen, wovon 5 Punkte als Bonuspunkte behandelt werden, so daß man mit Erreichen von 50 Punkten bereits 100% der Klausur bestanden hat. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mindestens 25 Punkte erreicht werden.

Bearbeitungszeit: Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Form der Abgabe: Bitte beginnt jede Aufgabe auf einer neuen Seite und schreibt auf jedes von Euch benutzte Blatt Euren Namen und Eure Matrikelnummer.

Hilfsmittel: Als Hilfsmittel ist ausschließlich ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt in eigener Handschrift (keine Kopien) zugelassen, keine Mobiltelefone, PDAs, Bücher, Hefter, Kopien, etc.

Hinweis: Verschafft Euch zunächst einen Überblick über alle Aufgaben und beginnt mit der Aufgabe, die Euch am wenigsten aufwendig erscheint.

Aufgabe 1 *(3 Punkte)*

Es seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi \in \text{Form}(P)$. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Wenn $(H, \vdash_H)$ ein korrekter und vollständiger Hilbertkalkül ist, so gilt stets: $\varphi \Vdash \psi \Leftrightarrow \neg\psi \vdash_H \neg\varphi$.
2. Ist $\varphi \wedge \psi$ tautologisch, so sind auch stets $\varphi \vee \psi$ und $\varphi \rightarrow \psi$ tautologisch.
3. Das Resolutionsverfahren stellt ein Mittel dar, um Formelmengen auf Unerfüllbarkeit zu untersuchen.
4. Wenn $\varphi \nVdash \psi$ gilt, so gilt $B^*(\varphi \rightarrow \psi) = F$ für alle Belegungen $B : P \rightarrow \{T, F\}$.
5. Die Menge $\{\wedge, \vee, \neg\}$ bildet eine minimale Junktorbasis für die Menge der aussagenlogischen Formeln $Form(P)$. Eine Junktorbasis heißt minimal, wenn jedes Entfernen eines Junktors aus der Menge dazu führt, daß die Menge keine Junktorbasis mehr ist.
6. $\{p, \neg q, r\}, \{\neg p, q, \neg r\} \rightarrow_{res} \emptyset$ ist keine korrekte Anwendung der Resolventenregel auf die Klauseln $\{p, \neg q, r\}$ und $\{\neg p, q, \neg r\}$.

Aufgabe 2 *(3.5+2+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen sowie $p, q \in P$.

(a) Ergänze bitte die folgende Wahrheitstafel! In der Formel dieser Wahrheitstafel (im folgenden als φ bezeichnet) fehlen noch ein einstelliger Junktor und vier zweistellige Junktoren aus $\{\bot, \top, \land, \lor, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ sowie drei Vorkommnisse von Aussagensymbolen aus $\mathrm{Symb}(\varphi) = \{p, q\}$, d.h. in jede Lücke gehört nur **ein** Zeichen! Ergänze bitte **alle** in der Tabelle fehlenden Wahrheitswerte.

p	q	(	(	...	...	...	)	...	...	...	)	...	...
T	T			T				T				T	
T	F			F	T	F		T		F		T	
F	T				F	F		T		T		F	
F	F							T				F	

(b) Sei φ die Formel aus der Wahrheitstafel in Teilaufgabe (a). Gib sowohl eine konjunktive als auch eine disjunktive Normalform für φ an.

(c) Entscheide, ob die folgenden Formeln in DNF, in KNF oder in DNF und KNF zugleich sind. Bei diesem Aufgabenteil werden für falsche Antworten *keine* Punkte abgezogen.

$$\chi_1 = p \land q \land \neg\top$$
$$\chi_2 = p \land q \land \bot$$

Aufgabe 3 *(3+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $p, q \in P$.

(a) Untersuche bitte, ob die nachstehende Folgerungsbehauptung stimmt oder nicht stimmt und gib eine stichhaltige Argumentation für Dein Ergebnis an.

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow p) \Vdash p \rightarrow \neg p.$$

(b) Angenommen, für einen Hilbertkalkül $(H, \vdash_H)$ gilt

$$p \rightarrow (\neg q \rightarrow p) \vdash_H p \rightarrow \neg p.$$

Kann $(H, \vdash_H)$ korrekt sein? Kann $(H, \vdash_H)$ vollständig sein? Begründe bitte Deine Antworten schlüssig.

Aufgabe 4 *(5+2 Punkte)*

Seien P eine Menge von Aussagensymbolen und $\varphi, \psi, \chi, \kappa \in \mathrm{Form}(P)$.

(a) Beweise oder widerlege (durch Angabe eines Gegenbeispiels) die folgende Behauptung: *Wenn sowohl $\varphi \land \chi \Vdash \kappa$ als auch $\psi \land \chi \Vdash \kappa$ gilt, so gilt auch $(\varphi \lor \psi) \land \chi \Vdash \kappa$.*

(b) Ist die folgende Sequenzenregel korrekt?

$$\frac{\{\varphi \land \chi\} \rhd \kappa \quad \{\psi \land \chi\} \rhd \kappa}{\{(\varphi \lor \psi) \land \chi\} \rhd \kappa}$$

Aufgabe 5 *(5 Punkte)*

Beweise bitte mit Hilfe des Resolutionsverfahrens die nachstehende Folgerungsbehauptung:

$$\{p \land \neg(q \lor s), \neg s \rightarrow t, t \leftrightarrow \neg r\} \Vdash \neg(p \leftrightarrow r)$$

Aufgabe 6 *(2 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma = (S, OP, REL)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \{succ, add\}$ mit $succ : s \to s$ und $add : s \to s$ sowie $REL = \{R\}$ mit $R : \langle s >$. Weiterhin sei die Variablenmenge $X_s = \{x, x_1, x_2, \ldots\}$ gegeben und es sei $X = (X_s)$. Im folgenden bezeichnen $\varphi, \psi \in Form_\Sigma(X)$ zwei beliege Formeln. Gib **ohne Begründung** an, welche der folgenden Aussagen **wahr** bzw. **falsch** sind. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche Antwort wird ein halber Punkt abgezogen und nicht bearbeitete Teilaufgaben werden mit null Punkten bewertet. Insgesamt gibt es für diese Aufgabe aber mindestens null Punkte.

1. Es gilt $\varphi \equiv \psi$ genau dann, wenn die Formel $\varphi \leftrightarrow \psi$ tautologisch ist.
2. $\forall x.\, P(succ(add(x, y))$ ist eine Formel aus $Form_\Sigma(X)$.
3. $\forall x.\, P(x) = \neg\neg P(x)$ ist eine Formel aus $Form_\Sigma(X)$.
4. Wenn $\varphi \vdash_H \psi$ in einem beliebigen korrekten prädikatenlogischen Hilbert-Kalkül $(H, \vdash_H)$ gilt, dann gilt auch stets $\varphi \vdash_{PHK} \psi$.

Aufgabe 7 *(4+4 Punkte)*

Gegeben sei die folgende logische Signatur:

$$\begin{array}{lll} \Sigma_1 = & & \\ sorts: & s & \\ opns: & f_1: & s \to s \\ & f_2: & s \to s \\ rels: & P: & < s\, s > \end{array}$$

Weiterhin sei die Familie von Variablenmengen $X = (X_s)$ mit $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ gegeben.

(a) Gib eine Struktur A zu Σ_1 an, in der jede der folgenden Formeln gültig ist:
$\varphi_1 = \exists x. \exists y.\, (P(x, y) \wedge P(y, x))$
$\varphi_2 = \forall x. \forall y.\, (P(x, y) \to P(y, x))$
$\varphi_3 = \forall y. \exists x.\, f_1(x) = y \wedge \exists y. \forall x.\, f_2(x) \neq y$
$\varphi_4 = \forall y. \forall x_1. \forall x_2. (x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$
$\varphi_5 = \exists x. \forall y.,\, f_1(x) = y \leftrightarrow \exists x. \forall y.\, x = y$

(b) Beweise, daß die Formel φ_5 allgemeingültig ist.

Aufgabe 8 *(5+3.5 Punkte)*

Gegeben seien eine logische Signatur Σ_2, ein passendes Variablensystem X mit $x \in X$ sowie drei beliebige Formeln $\varphi, \psi, \chi \in Form_{\Sigma_2}(X)$. Beweise ohne Verwendung bereits bekannter Äquivalenzen und Folgerungen die erste Behauptung und widerlege die zweite Behauptung durch Angabe eines geeigneten Gegenbeispiels inklusive einer stichhaltigen Begründung.

(a) $(\exists x.\, \varphi) \vee (\neg(\forall x.\, \psi \leftrightarrow \perp)) \;\equiv\; (\neg \forall x.\, \neg\varphi) \vee (\exists x. \psi)$

(b) $\exists x.\, ((\varphi \vee \psi) \to \neg\chi) \;\Vdash\; (\exists x.\, (\varphi \vee \psi)) \to (\exists x.\, \chi)$

Aufgabe 9 *(3+3+3 Punkte)*

Gegeben sei die Signatur $\Sigma_3 = (S, OP, REL)$ mit $S = \{s\}$, $OP = \emptyset$ und $REL = \{P, Q\}$ mit $P : \langle s\, s\rangle$ und $Q : \langle s\, s\rangle$. Weiterhin sei die Variablenmenge $X_s = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$ gegeben.

(a) Formuliere eine Formel φ, so daß gilt:
$\mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi) = \{A \mid A$ ist Σ-Struktur, $|A_s| \geq 2$ und P_A ist eine Äquivalenzrelation $\}$.
Hinweis: Eine Äquivalenzrelation ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.

(b) Formuliere eine Formel ψ, so daß gilt:
$\mathrm{Mod}_\Sigma(\psi) = \{A \mid A$ ist Σ-Struktur, $P_A \neq \emptyset$ und $P_A = Q_A^{-1}\}$.
Hinweis: Ist R eine zweistellige Relation, so bezeichnet R^{-1} die Umkehrrelation von R, definiert durch: $R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$.

(c) Gib ohne Beweis eine Struktur $A \in \mathrm{Mod}_\Sigma(\varphi \wedge \psi)$ an.