Modul „TheGI 4: Spezifikation und Semantik“

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Claudia Ermel, Frank Hermann

Sommersemester 2009

Probeklausur
am 7. Juli 2009

- Bei der Klausur sind 100 Punkte erreichbar. Wer 50 Punkte erreicht, hat die Klausur bestanden.
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN-A4-Blatt.
- Haltet bitte einen Ausweis mit Lichtbild (Personalausweis, Pass, Führerschein, Studentenausweis) bereit.
- Schreibt nicht mit Bleistift oder Rotstift. Das wird nicht bewertet.
- Die Signaturen, Algebren und Petrinetze, auf die sich die Aufgaben beziehen, befinden sich alle auf dem letzten Blatt der Klausur, das abgetrennt werden kann.
- Zusätzliches Papier steht auf Anfrage zur Verfügung.

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:

Punkteverteilung:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ
Punkte	15	12	8	10Z	15	15	13	11	11	100 + 10Z
Erreicht										
Korrektor										

Algebraische Spezifikation

Aufgabe 1 **15 Punkte**

Diese Aufgabe bezieht sich auf die Spezifikation $SP_1 = (\Sigma_1, E_1)$ und die Algebren A und B auf Seite 13.
Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	"$\texttt{add}(\texttt{cat}, \texttt{put}(\texttt{cat}))$" ist ein Grundterm.		
2.	"$\texttt{put}(\texttt{cat}) = \texttt{add}(\texttt{put}(\texttt{cat}), \texttt{best})$" ist eine Grundgleichung.		
3.	Es gibt einen injektiven Homomorphismus $h\colon A \to B$.		
4.	Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $h\colon T_{\Sigma 1} \to B$.		
5.	$T_{\Sigma 1}$ ist eine Repräsentantenalgebra zu der Quotiententermalgebra T_{SP1} von $SP1$.		
6.	Die Gleichung "$(e3) : \texttt{add}(\texttt{cat}, \texttt{put}(\texttt{cat})) = \texttt{put}(\texttt{cat})$" gilt in allen Algebren $C \in MOD(SP1)$.		
7.	Die Algebra B ist operationserzeugt.		
8.	Die Algebra A ist initial korrekt.		
9.	Sei D eine operationserzeugte Algebra, dann gibt es für jedes Element d einer Trägermenge in D einen Grundterm, der zu d ausgewertet wird.		
10.	Sei $\equiv$ eine Kongruenzrelation und $f\colon s \to s$ eine Operation in der Signatur Σ, dann gilt $f(r_1) \equiv f(r_2) \Longrightarrow r_1 \equiv r_2$		

Für die folgenden Aufgaben sind die Spezifikation $SP_2 = (\Sigma_2, E_2)$ und die SP_2-Modellalgebra M auf Seite 13 gegeben.

Wir wollen zeigen, dass SP_2 initial korrekt bezüglich der Algebra M ist und benutzen dazu das Beweisverfahren "schrittweise Korrektheit".

Wir wählen die Spezifikation $SP' = (\Sigma', E') \subseteq SP_2$ so, dass sie nur frei erzeugende Operationen enthält, also:

opns: $\texttt{t}\colon\ \to \texttt{bool}$
$\texttt{f}\colon\ \to \texttt{bool}$
$\texttt{empty}\colon\ \to \texttt{queue}$
$\texttt{enq}\colon \texttt{bool queue} \to \texttt{queue}$
vars: keine
eqns: keine

Aufgabe 2 12 Punkte

SP' initial korrekt bezüglich $M|_{SP'}$:

Da die Spezifikation SP' keine Gleichungen enthält ist die Repräsentantenalgebra R gleich der Termalgebra $T_{\Sigma'}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Termauswertung $\text{eval}(M)\colon T_{\Sigma'} \to M$ bijektiv ist:

Injektivität:

Seien $s, s' \in T_{\Sigma',\texttt{bool}}$ mit $\text{eval}(M)_{\texttt{bool}}(s) = b = \text{eval}(M)_{\texttt{bool}}(s')$.

....

....

Seien $s, s' \in T_{\Sigma',\texttt{queue}}$ mit $\text{eval}(M)_{\texttt{queue}}(s) = w = \text{eval}(M)_{\texttt{queue}}(s')$.
Induktion über die Länge von w:
Induktionsanfang: $|w| = 0$

....

....

Induktionsvoraussetzung:
Für ein Wort v der Länge $|v| = n$ und Terme $r, r' \in T_{\Sigma',\texttt{queue}}$ mit $\text{eval}(M)_{\texttt{queue}}(r) = v = \text{eval}(M)_{\texttt{queue}}(r')$ gilt $r = r'$.
Induktionsschritt: $|w| = n + 1$

....

....

....

....

....

....

Surjektivität:

Aufgabe 3 **8 Punkte**

Sortengleichheit:

Die Sorten von SP' und SP_2 sind offensichtlich gleich.

M **erfüllt** $E_2 \setminus E'$**:**

Gleichung ①:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Gleichung ②:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Gleichung ③:

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe) 10 Zusatzpunkte

$SP' \subseteq SP_2$ ist vollständige Erweiterung:

Es ist zu zeigen, dass für alle $s \in T_{\Sigma_2}$ ein $s' \in T_{\Sigma'}$ mit $s \equiv_{E_2} s'$ existiert. Dies zeigen wir mit struktureller Induktion.

Induktionsanfang:

$s = \texttt{t}$: ....

$s = \texttt{f}$: ....

$s = \texttt{empty}$: ....

Induktionsvoraussetzung:

Für $p \in T_{\Sigma_2,\texttt{bool}}$ existiert ein $p' \in T_{\Sigma',\texttt{bool}}$ mit $p \equiv_{E_2} p'$.
Für $r \in T_{\Sigma_2,\texttt{queue}}$ existiert ein $r' \in T_{\Sigma',\texttt{queue}}$ mit $r \equiv_{E_2} r'$.

Induktionsschritt:

$s = \texttt{enq}(p, r)$: ....

$s = \texttt{deq}(r)$: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Damit sind alle Bedingungen des Satzes zur schrittweisen Korrektheit erfüllt und SP_2 ist initial korrekt bezüglich M. $\square$

Petrinetze

Die folgenden Aufgaben 5, 6 und 7 beziehen sich auf das Netz N_1 und die Markierungen M_1 und M_2 auf Seite 14.

Aufgabe 5 — 15 Punkte

Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es 1,5 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	t_2 und t_4 sind bezüglich M_1 im Konflikt.		
2.	t_2 und t_4 sind bezüglich M_2 im Konflikt.		
3.	Das Netz (N_1, M_1) ist lebendig.		
4.	Das Netz (N_1, M_1) ist beschränkt.		
5.	Unter M_1 ist die Schaltfolge $M_1 \xrightarrow{t_4} M_3 \xrightarrow{t_3} M_4 \xrightarrow{t_2} M_5 \xrightarrow{t_1} M_6$ möglich.		
6.	$I_\mathrm{p}\colon P \to \mathbb{Z}$ mit $(I_\mathrm{p}(p_1), \ldots, I_\mathrm{p}(p_5)) = (1, 1, 0, 1, 0)$ ist eine P-Invariante von N_1.		
7.	$I_\mathrm{t}\colon T \to \mathbb{N}$ mit $(I_\mathrm{t}(t_1), \ldots, I_\mathrm{t}(t_4)) = (1, 1, 2, 0)$ ist eine T-Invariante von N_1.		
8.	Für die Kausalrelation $<_\mathrm{k}$ gilt: $p_4 <_\mathrm{k} p_1$		
Sei (N, M) ein P/T-Netz mit Netzkomplementierung (N', M').			
9.	Wenn t_1 in N' unter M' aktiviert ist, dann ist t_1 auch in N unter M aktiviert.		
10.	Die entsprechenden Markierungsgraphen MG und MG' sind isomorph.		

Aufgabe 6 **15 Punkte**

Ergänzt den folgenden Erreichbarkeitsgraphen von (N_1, M_2)! Gebt also die jeweils schaltenden Transitionen an und berechnet die resultierenden Markierungen, die Ihr analog zu der gegebenen Markierung M_2 in der Form $(M(p_1), \dots, M(p_5))$ angeben könnt.

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{M_2 = (1,0,3,2,0)} \arrow[r, "\dots"] \arrow[d, "t_4"] & \boxed{\dots} \arrow[r, "\dots"] \arrow[d, "\dots"] & \boxed{\dots} \arrow[d, "\dots"] \\
\boxed{\dots} \arrow[r, "\dots"] \arrow[d, "\dots"] & \boxed{\dots} \arrow[r, "\dots"] & \boxed{\dots} \\
\boxed{\dots} \arrow[d, "\dots"] & & \\
\boxed{\dots} & &
\end{tikzcd}
$$

Aufgabe 7 **13 Punkte**

(a) Gebt die Netzkomplementierung (N_1', M_1') des Netzes (N_1, M_1) an!

(b) Gebt anschließend für (N_1', M_1') die Markierungen der folgenden Schaltsequenz in der Form $(M(p_1), \ldots, M(p_5), \ldots)$ an: $M_1' \xrightarrow{t_3} M_2' \xrightarrow{t_2} M_3' \xrightarrow{t_4} M_4'$.

(c) Zeigt, dass t_3 unter M_2' nicht aktiviert ist.

Die folgenden Aufgaben 8 und 9 beziehen sich auf das Netz N_2 (mit unbeschränkten Kapazitäten) auf Seite 14.

Aufgabe 8 — 11 Punkte

a) Ergänzt die folgende Matrix-Darstellung $\underline{N_2}$ von N_2!

$\underline{N_2} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ mit

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3\}$

$$\underline{pre} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{post} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

b) Berechnet die P-Invarianten von $\underline{N_2}$!

Aufgabe 9 **11 Punkte**

a) Sei M eine Markierung für das Netz N_2 mit: $M(p_1) = 6$, $M(p_2) = 0$, $M(p_3) = 0$ und $M(p_4) = 0$. Gebt (visualisiert) ein Prozessnetz von N_2 für die Schaltsequenz $M \xrightarrow{t_2} M_1 \xrightarrow{t_3} M_2 \xrightarrow{t_1} M_3$ an!

b) Gebt die nebenläufigen Transitionen dieses Prozesses an!

....

....

c) Gebt alle mit der Kausalrelation des Prozessnetzes verträglichen totalen Ordnungen der Transitionen an!

....

....

Signaturen und Algebren

Für Aufgabe 1:

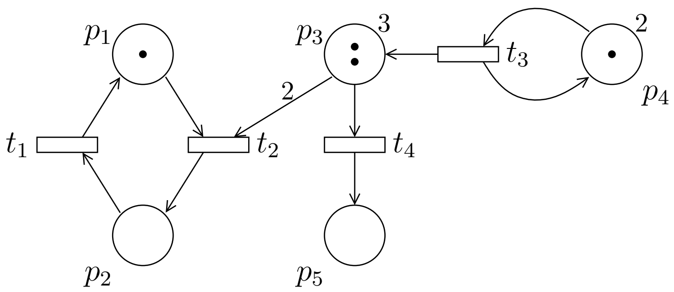
$SP1 =$		A	B
sorts:	$\texttt{pet}$	$A_{\texttt{pet}} = \{a_1, a_2, a_3\}$	$B_{\texttt{pet}} = \{b_1, b_2\}$
	$\texttt{group}$	$A_{\texttt{group}} = \mathcal{P}(A_{\texttt{pet}})$	$B_{\texttt{group}} = \{(b_1, b_2)\}$
opns:	$\texttt{cat}\colon \ \to \texttt{pet}$	$\texttt{cat}_A \in A_{\texttt{pet}}$ $\texttt{cat}_A = a_1$	$\texttt{cat}_B \in B_{\texttt{pet}}$ $\texttt{cat}_B = b_1$
	$\texttt{best}\colon \ \to \texttt{group}$	$\texttt{best}_A \in A_{\texttt{group}}$ $\texttt{best}_A = \{a_1, a_2, a_3\}$	$\texttt{best}_B \in B_{\texttt{group}}$ $\texttt{best}_B = (b_1, b_2)$
	$\texttt{put}\colon \texttt{pet} \to \texttt{group}$	$\texttt{put}_A\colon A_{\texttt{pet}} \to A_{\texttt{group}}$ $x \mapsto \{x\}$	$\texttt{put}_B\colon B_{\texttt{pet}} \to B_{\texttt{group}}$ $x \mapsto (b_1, b_2)$
	$\texttt{add}\colon \texttt{pet group} \to \texttt{group}$	$\texttt{add}_A\colon A_{\texttt{pet}} \times A_{\texttt{group}} \to A_{\texttt{group}}$ $(x, y) \mapsto y \cup \{x\}$	$\texttt{add}_B\colon B_{\texttt{pet}} \times B_{\texttt{group}} \to B_{\texttt{group}}$ $(x, y) \mapsto (b_1, b_2)$
vars:	$x\colon \texttt{pet}$		
eqns:	$(e1)\ \texttt{add}(x, \texttt{put}(x)) = \texttt{put}(x)$ $(e2)\ \texttt{add}(x, \texttt{best}) = \texttt{add}(\texttt{cat}, \texttt{best})$		

Für Aufgaben 2, 3 und 4:

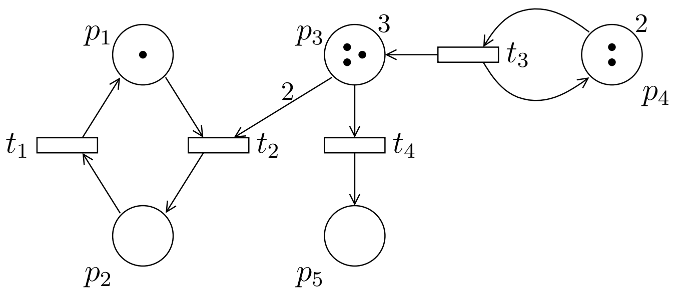
$SP_2 =$		M
sorts:	$\texttt{bool}$	$M_{\texttt{bool}} = \{0, 1\}$
	$\texttt{queue}$	$M_{\texttt{queue}} = \{0, 1\}^*$
opns:	$\texttt{t}\colon \ \to \texttt{bool}$	$\texttt{t}_M = 1 \in M_{\texttt{bool}}$
	$\texttt{f}\colon \ \to \texttt{bool}$	$\texttt{f}_M = 0 \in M_{\texttt{bool}}$
	$\texttt{empty}\colon \ \to \texttt{queue}$	$\texttt{empty}_M = \lambda \in M_{\texttt{queue}}$
	$\texttt{enq}\colon \texttt{bool queue} \to \texttt{queue}$	$\texttt{enq}_M\colon M_{\texttt{bool}} \times M_{\texttt{queue}} \to M_{\texttt{queue}}$ $(x, w) \mapsto x.w$
	$\texttt{deq}\colon \texttt{queue} \to \texttt{queue}$	$\texttt{deq}_M\colon M_{\texttt{queue}} \to M_{\texttt{queue}}$ $w \mapsto \begin{cases} \lambda & \text{, falls } w = \lambda \\ w' & \text{, falls } w = w'.x, w' \in M_{\texttt{queue}}, x \in M_{\texttt{bool}} \end{cases}$
vars:	$\texttt{b}, \texttt{c}\colon \texttt{bool}, \texttt{q}\colon \texttt{queue}$	
eqns:	1 $\texttt{deq}(\texttt{empty}) = \texttt{empty}$ 2 $\texttt{deq}(\texttt{enq}(\texttt{b}, \texttt{empty})) = \texttt{empty}$ 3 $\texttt{deq}(\texttt{enq}(\texttt{b}, \texttt{enq}(\texttt{c}, \texttt{q}))) = \texttt{enq}(\texttt{b}, \texttt{deq}(\texttt{enq}(\texttt{c}, \texttt{q})))$	

Petrinetze

Für Aufgaben 5, 6 und 7:



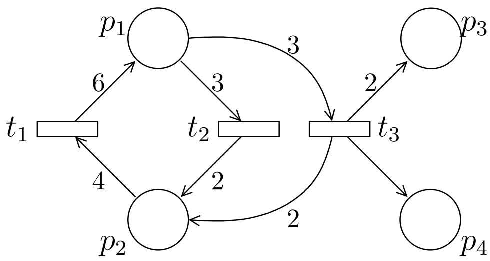
(N_1, M_1)



(N_1, M_2)

Kanten ohne Beschriftung haben ein Gewicht von 1 und Stellen ohne Beschriftung eine Kapazität von ω.

Für Aufgaben 8 und 9:



N_2