Modul „TheGI 4: Spezifikation und Semantik“

Veranstalter: Hartmut Ehrig, Julia Padberg, Benjamin Braatz, Ulrike Prange

Sommersemester 2008

Probeklausur (Musterlösung) am 8. Juli 2008

Algebraische Spezifikation

Für die folgende Aufgabe ist die Spezifikation $RS = (\Omega, F)$ mit den Algebren X und Y gegeben.

$RS =$		X		Y	
sorts:	$\mathtt{r}$	$X_{\mathtt{r}} = \{\triangle, \nabla, \diamondsuit\}$		$Y_{\mathtt{r}} = \{\clubsuit, \heartsuit\}$	
	$\mathtt{s}$	$X_{\mathtt{s}} = \{\bigcirc\}$		$Y_{\mathtt{s}} = \{\star\}$	
opns:	$\mathtt{a}\colon \to \mathtt{r}$	$\mathtt{a}_X \in X_{\mathtt{r}}$	$\mathtt{a}_X = \diamondsuit$	$\mathtt{a}_Y \in Y_{\mathtt{r}}$	$\mathtt{a}_Y = \heartsuit$
	$\mathtt{b}\colon \to \mathtt{s}$	$\mathtt{b}_X \in X_{\mathtt{s}}$	$\mathtt{b}_X = \bigcirc$	$\mathtt{b}_Y \in Y_{\mathtt{s}}$	$\mathtt{b}_Y = \star$
	$\mathtt{c}\colon \mathtt{r} \to \mathtt{s}$	$\mathtt{c}_X\colon X_{\mathtt{r}} \to X_{\mathtt{s}}$	$x \mapsto \bigcirc$	$\mathtt{c}_Y\colon Y_{\mathtt{r}} \to Y_{\mathtt{s}}$	$x \mapsto \star$
	$\mathtt{d}\colon \mathtt{r}\ \mathtt{s} \to \mathtt{s}$	$\mathtt{d}_X\colon X_{\mathtt{r}} \times X_{\mathtt{s}} \to X_{\mathtt{s}}$	$(x, y) \mapsto \bigcirc$	$\mathtt{d}_Y\colon Y_{\mathtt{r}} \times Y_{\mathtt{s}} \to Y_{\mathtt{s}}$	$(x, y) \mapsto \star$
vars:	$\mathtt{x}\colon \mathtt{r}$				
eqns:	42 $\mathtt{c}(\mathtt{x}) = \mathtt{b}$				

Aufgabe 1

Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	$\mathtt{d}(\mathtt{a}, \mathtt{c}(\mathtt{a}))$ ist ein Grundterm.		
2.	$\mathtt{c}(\mathtt{a}) = \mathtt{d}(\mathtt{c}(\mathtt{a}), \mathtt{b})$ ist eine Grundgleichung.		
3.	Es gibt einen injektiven Homomorphismus $h\colon X \to Y$.		
4.	Es gibt einen surjektiven Homomorphismus $h\colon T_\Omega \to X$.		
5.	42 ist in X und Y gültig.		
6.	Es gilt $\mathtt{d}(\mathtt{a}, \mathtt{c}(\mathtt{a})) = \mathtt{d}(\mathtt{a}, \mathtt{d}(\mathtt{a}, \mathtt{b}))$.		
7.	Es gilt $INIT(RS) \subseteq MOD(RS)$.		
8.	Sei $SP = (\Sigma, \varnothing)$, dann ist T_Σ eine Repräsentantenalgebra zu T_{SP}.		
9.	Sei $A \in INIT(SP)$, $B \in MOD(SP)$, B operationserzeugt und $h\colon A \to B$ injektiv, dann gilt $B \in INIT(SP)$.		
10.	Sei $\sim$ eine Kongruenzrelation und $\mathtt{f}\colon \mathtt{s}\ \mathtt{s} \to \mathtt{s} \in \Sigma$, dann gilt $r_1 \sim r_2 \Longrightarrow \mathtt{f}(r_1, r_2) \sim \mathtt{f}(r_2, r_1)$		

Lösung:

	Begründung	**wahr**	**falsch**
1.	Offensichtlich	X	
2.	Sortenkonflikt		X
3.	Nicht möglich, da $\lvert X_{\mathtt{r}}\rvert > \lvert Y_{\mathtt{r}}\rvert$		X
4.	Nicht möglich, da `a` einziger Term zur Sorte `r`		X
5.	$\lvert X_{\mathtt{s}}\rvert = \lvert Y_{\mathtt{s}}\rvert = 1$	X	
6.	Gilt in X und Y, folgt nicht aus 42	(X)	(X)
7.	Initiale Algebren erfüllen die Spezifikation.	X	
8.	Ohne Gleichungen hat jede Äquivalenzklasse genau einen Term.	X	
9.	h auch surjektiv, da B operationserzeugt	X	
10.	Kongruenz $\sim$ symmetrisch und unter Operationen abgeschlossen	X	

Für die folgenden Aufgaben sind die folgende Spezifikation $SP = (\Sigma, E)$ und die SP-Algebra A gegeben:

$SP =$		A	
sorts:	$\mathtt{nat}$	$A_{\mathtt{nat}} = \mathbb{N}$	
	$\mathtt{list}$	$A_{\mathtt{list}} = \mathbb{N}^*$	
opns:	$\mathtt{z}\colon\ \to \mathtt{nat}$	$\mathtt{z}_A \in A_{\mathtt{nat}}$	$\mathtt{z}_A = 0$
	$\mathtt{s}\colon \mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$	$\mathtt{s}_A\colon A_{\mathtt{nat}} \to A_{\mathtt{nat}}$	$n \mapsto n+1$
	$\mathtt{empty}\colon\ \to \mathtt{list}$	$\mathtt{empty}_A \in A_{\mathtt{list}}$	$\mathtt{empty}_A = \lambda$
	$\mathtt{ladd}\colon \mathtt{nat}\ \mathtt{list} \to \mathtt{list}$	$\mathtt{ladd}_A\colon A_{\mathtt{nat}} \times A_{\mathtt{list}} \to A_{\mathtt{list}}$	$(n,l) \mapsto n.l$
	$\mathtt{radd}\colon \mathtt{list}\ \mathtt{nat} \to \mathtt{list}$	$\mathtt{radd}_A\colon A_{\mathtt{list}} \times A_{\mathtt{nat}} \to A_{\mathtt{list}}$	$(l,n) \mapsto l.n$
vars:	$\mathtt{m}, \mathtt{n}\colon \mathtt{nat}, \mathtt{l}\colon \mathtt{list}$		
eqns:	① $\mathtt{radd}(\mathtt{empty}, \mathtt{n}) = \mathtt{ladd}(\mathtt{n}, \mathtt{empty})$		
	② $\mathtt{radd}(\mathtt{ladd}(\mathtt{m}, \mathtt{l}), \mathtt{n}) = \mathtt{ladd}(\mathtt{m}, \mathtt{radd}(\mathtt{l}, \mathtt{n}))$		

Aufgabe 2

Ergänzt die Termalgebra T_Σ!

$T_{\Sigma,\mathtt{nat}} =$ ....

$T_{\Sigma,\mathtt{list}} =$ ....

$\mathtt{z}_{T_\Sigma} \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}$, $\mathtt{z}_{T_\Sigma} =$ ....

$\mathtt{s}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \to T_{\Sigma,\mathtt{nat}}$, $x \mapsto$ ....

$\mathtt{empty}_{T_\Sigma} \in T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $\mathtt{empty}_{T_\Sigma} =$ ....

$\mathtt{ladd}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \times T_{\Sigma,\mathtt{list}} \to T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $(x,y) \mapsto$ ....

$\mathtt{radd}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{list}} \times T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \to T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $(x,y) \mapsto$ ....

Lösung:

$T_{\Sigma,\mathtt{nat}} = \{\mathtt{z}\} \cup \{\mathtt{s}(t) \mid t \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}\}$

$$T_{\Sigma,\mathtt{list}} = \{\mathtt{empty}\} \cup \{\mathtt{ladd}(n,l) \mid n \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}, l \in T_{\Sigma,\mathtt{list}}\} \cup \{\mathtt{radd}(l,n) \mid l \in T_{\Sigma,\mathtt{list}}, n \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}\}$$

$\mathtt{z}_{T_\Sigma} \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}$, $\mathtt{z}_{T_\Sigma} = \mathtt{z}$

$\mathtt{s}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \to T_{\Sigma,\mathtt{nat}}$, $x \mapsto \mathtt{s}(x)$

$\mathtt{empty}_{T_\Sigma} \in T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $\mathtt{empty}_{T_\Sigma} = \mathtt{empty}$

$\mathtt{ladd}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \times T_{\Sigma,\mathtt{list}} \to T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $(x,y) \mapsto \mathtt{ladd}(x,y)$

$\mathtt{radd}_{T_\Sigma}\colon T_{\Sigma,\mathtt{list}} \times T_{\Sigma,\mathtt{nat}} \to T_{\Sigma,\mathtt{list}}$, $(x,y) \mapsto \mathtt{radd}(x,y)$

Aufgabe 3

Wir wollen zeigen, dass SP initial korrekt bezüglich der Algebra A ist. Vervollständigt hierzu den folgenden Beweis mit schrittweiser Korrektheit!

Wahl der Spezifikation $SP' \subseteq SP$:

Wir wählen die Spezifikation $SP' = (\Sigma', E') \subseteq SP$ so, dass sie nur frei erzeugende Operationen enthält, also:

SP'=

sorts: `nat`, `list`

opns: ....

....

....

....

Lösung:

SP'=

sorts: `nat`, `list`

opns: `z`: $\rightarrow$ `nat`

`s`: `nat` $\rightarrow$ `nat`

`empty`: $\rightarrow$ `list`

`ladd`: `nat list` $\rightarrow$ `list`

SP' initial korrekt bezüglich $A|_{SP'}$:

Da die Spezifikation SP' keine Gleichungen enthält ist die Repräsentantenalgebra R gleich der Termalgebra $T_{\Sigma'}$. Es bleibt zu zeigen, dass die Termauswertung $\mathrm{eval}(A)\colon T_{\Sigma'} \to A$ bijektiv ist:

Injektivität:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Surjektivität:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Lösung:

Injektivität: Seien $t, t' \in T_{\Sigma',\mathtt{nat}}$ mit $\mathrm{eval}(A)_{\mathtt{nat}}(t) = n = \mathrm{eval}(A)_{\mathtt{nat}}(t')$. Dann gilt:

$$t = \mathtt{s}^n(\mathtt{z}) = t'$$

Seien $t, t' \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$ mit $\mathrm{eval}(A)_{\mathtt{list}}(t) = n_1 \dots n_m = \mathrm{eval}(A)_{\mathtt{list}}(t')$. Dann gilt:

$$t = \mathtt{ladd}(\mathtt{s}^{n_1}(\mathtt{z}), \dots \mathtt{ladd}(\mathtt{s}^{n_m}(\mathtt{z}), \mathtt{empty})) = t'$$

Surjektivität: Für jedes $n \in \mathbb{N} = A_{\mathtt{nat}}$ gibt es den Term

$$t = \mathtt{s}^n(\mathtt{z}) \in T_{\Sigma',\mathtt{nat}}$$

mit $\mathrm{eval}(A)_{\mathtt{nat}}(t) = n$.
Für jedes $w = n_1 \dots n_m \in \mathbb{N}^* = A_{\mathtt{list}}$ gibt es den Term

$$t = \mathtt{ladd}(\mathtt{s}^{n_1}(\mathtt{z}), \dots \mathtt{ladd}(\mathtt{s}^{n_m}(\mathtt{z}), \mathtt{empty})) \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$$

mit $\mathrm{eval}(A)_{\mathtt{list}}(t) = w$.

Sortengleichheit:

Die Sorten von SP' und SP sind offensichtlich gleich.

A **erfüllt** $E \setminus E'$**:**

Gleichung ①:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Gleichung ②:

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Lösung:

Gleichung ①: Sei $ass_{\mathtt{nat}}(\mathtt{n}) = x$.
Dann gilt:
$\mathrm{xeval}(ass)_{\mathtt{list}}(\mathtt{radd}(\mathtt{empty}, \mathtt{n})) = \lambda.x = x = x.\lambda = \mathrm{xeval}(ass)_{\mathtt{list}}(\mathtt{ladd}(\mathtt{n}, \mathtt{empty})$

Gleichung ②: Sei $ass_{\mathtt{nat}}(\mathtt{m}) = x$, $ass_{\mathtt{nat}}(\mathtt{n}) = y$ und $ass_{\mathtt{list}}(\mathtt{l}) = w$.
Dann gilt:
$\mathrm{xeval}(ass)_{\mathtt{list}}(\mathtt{radd}(\mathtt{ladd}(\mathtt{m}, \mathtt{l}), \mathtt{n})) = (x.w).y = x.(w.y) = \mathrm{xeval}(ass)_{\mathtt{list}}(\mathtt{ladd}(\mathtt{m}, \mathtt{radd}(\mathtt{l}, \mathtt{n}))$

$SP' \subseteq SP$ **ist vollständige Erweiterung:**

Es ist zu zeigen, dass für alle $t \in T_\Sigma$ ein $t' \in T_{\Sigma'}$ mit $t \sim_E t'$ existiert. Dies zeigen wir mit struktureller Induktion.

Induktionsanfang:

$t = \mathtt{z}$: ....

$t = \mathtt{empty}$: ....

Induktionsvoraussetzung:

Für $r \in T_{\Sigma,\mathtt{nat}}$ existiert ein $r' \in T_{\Sigma',\mathtt{nat}}$ mit $r \sim_E r'$.
Für $s \in T_{\Sigma,\mathtt{list}}$ existiert ein $s' \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$ mit $s \sim_E s'$.

Induktionsschritt:

$t = \mathtt{s}(r)$: ....

$t = \mathtt{ladd}(r, s)$: ....

$t = \mathtt{radd}(s, r)$: ....

....

....

....

Lösung:

Induktionsanfang:

$t = \mathtt{z}$: $t = \mathtt{z} \in T_{\Sigma',\mathtt{nat}}$
$t = \mathtt{empty}$: $t = \mathtt{empty} \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$

Induktionsschritt:

$t = \mathtt{s}(r)$: $t = \mathtt{s}(r) \overset{\text{IV}}{\sim}_E \mathtt{s}(r') \in T_{\Sigma',\mathtt{nat}}$
$t = \mathtt{ladd}(r, s)$: $t = \mathtt{ladd}(r, s) \overset{\text{IV}}{\sim}_E \mathtt{ladd}(r', s') \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$
$t = \mathtt{radd}(s, r)$: $t = \mathtt{radd}(s, r) \overset{\text{IV}}{\sim}_E \mathtt{radd}(s', r')$

Induktion über s':

IA: $\mathtt{radd}(s', r') = \mathtt{radd}(\mathtt{empty}, r') \overset{①}{\sim}_E \mathtt{ladd}(r', \mathtt{empty}) \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$
IV: $\mathtt{radd}(s'', r') \sim_E s''' \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$
IS: $\mathtt{radd}(s', r') = \mathtt{radd}(\mathtt{ladd}(r'', s''), r') \overset{②}{\sim}_E \mathtt{ladd}(r'', \mathtt{radd}(s'', r'))$
$\overset{\text{IV}}{\sim}_E \mathtt{ladd}(r'', s''') \in T_{\Sigma',\mathtt{list}}$

Damit sind alle Bedingungen des Satzes zur schrittweisen Korrektheit erfüllt und SP ist initial korrekt bezüglich A. □

Aufgabe 4

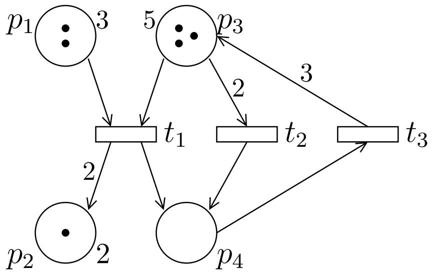
Es soll nun ein Operationssymbol $\texttt{inv}\colon \texttt{list} \to \texttt{list}$ hinzugefügt werden. Die Operation soll die Reihenfolge einer Liste umkehren, ihre Interpretation in der Algebra A ist also $\texttt{inv}_A\colon A_{\texttt{list}} \to A_{\texttt{list}}$ mit $n_1 \dots n_k \mapsto n_k \dots n_1$. Spezifiziert diese Operation durch eine geeignete Menge an Gleichungen!

Lösung:

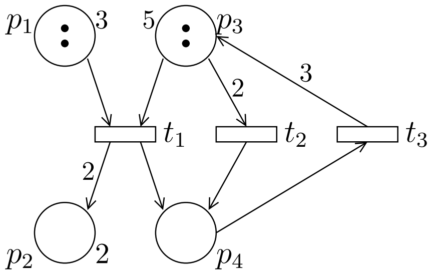
$\texttt{inv}(\texttt{empty}) = \texttt{empty}$
$\texttt{inv}(\texttt{ladd}(\texttt{n}, \texttt{l})) = \texttt{radd}(\texttt{inv}(\texttt{l}), \texttt{n})$

Petrinetze

Für die folgenden Aufgaben ist das folgende P/T-Netz N mit den Markierungen M_1 und M_2 gegeben:



(N, M_1)



(N, M_2)

Hierbei haben, wie üblich, Kanten ohne Beschriftung ein Gewicht von 1 und Stellen ohne Beschriftung eine Kapazität von ω.

Aufgabe 5

Entscheidet, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind und kreuzt entsprechend an! Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen, wobei es jedoch minimal 0 Punkte für die ganze Aufgabe gibt.

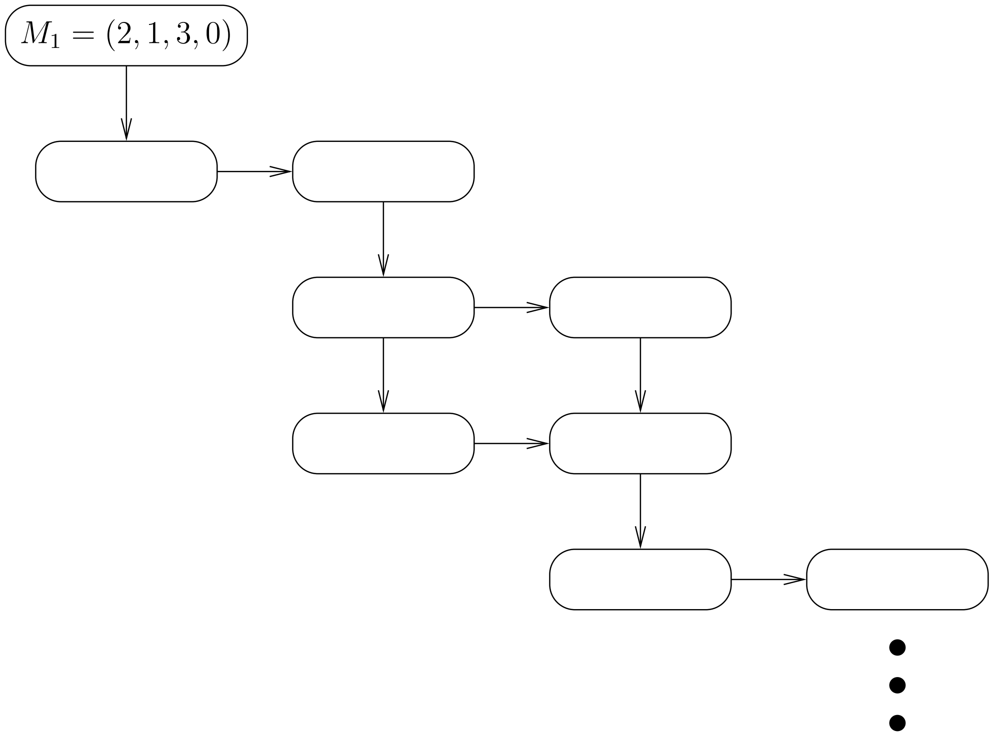
	Aussage	**wahr**	**falsch**
1.	t_1 und t_2 sind bezüglich M_1 im Konflikt.		
2.	t_1 und t_2 sind bezüglich M_2 im Konflikt.		
3.	Das Netz (N, M_2) ist lebendig.		
4.	Das Netz (N, M_2) ist beschränkt.		
5.	Unter M_2 ist die Schaltfolge $M_2 \xrightarrow{t_1} M_3 \xrightarrow{t_2} M_4 \xrightarrow{t_3} M_5$ möglich.		
6.	$(1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ ist eine P-Invariante von N.		
7.	$(0, 3, 2)^{\mathrm{T}}$ ist eine T-Invariante von N.		
8.	Für die Kausalrelation $<_{\mathrm{k}}$ gilt: $p_3 <_{\mathrm{k}} p_3$		
Sei (N, M) ein P/T-Netz mit Netzkomplementierung (N', M').			
9.	Wenn t_1 in N unter M aktiviert ist, dann ist t_1 auch in N' unter M' aktiviert.		
10.	Die Erreichbarkeitsgraphen EG_M und $EG_{M'}$ sind isomorph.		

Lösung:

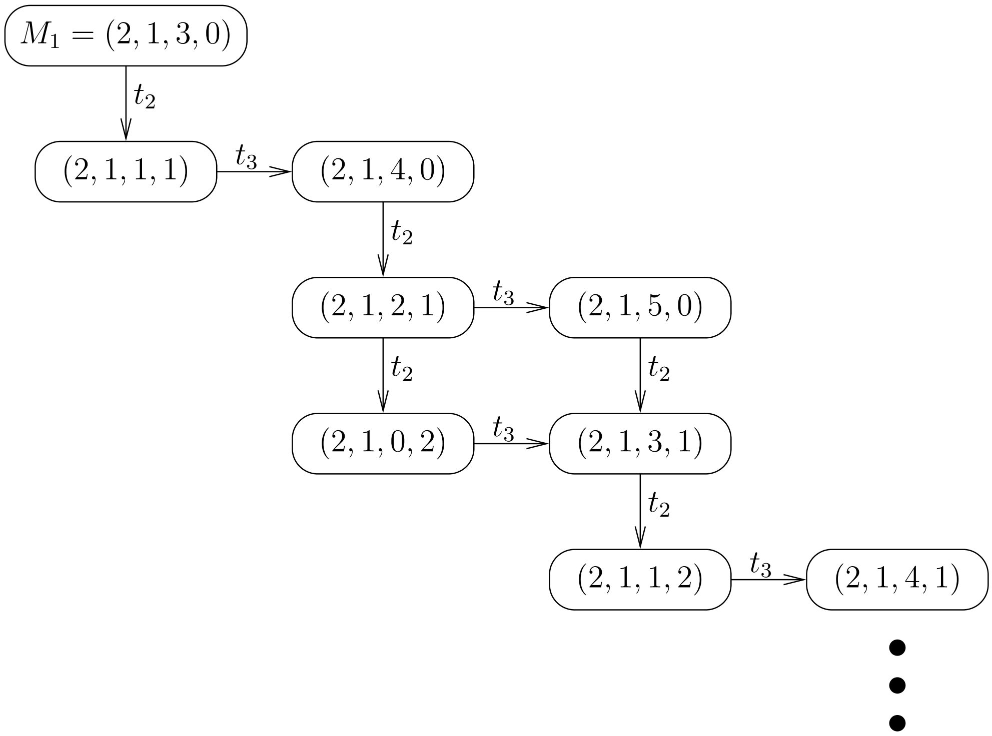
	Begründung	**wahr**	**falsch**
1.	t_1 nicht aktiviert./Token auf p_3 ausreichend.		X
2.	Konkurrenz um Token auf p_3.	X	
3.	t_1 kann nur einmal schalten.		X
4.	Auf p_4 sammeln sich unbeschränkt Token.		X
5.	Nach Schalten von t_1 ist t_2 nicht mehr aktiviert.		X
6.	Die Invariante müsste $(2, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ lauten.		X
7.	1 Token zu viel auf p_4.		X
8.	Zirkel über t_2, p_4 und t_3.	X	
9.	Äquivalenz des Schaltverhaltens	X	
10.	ebenso	X	

Aufgabe 6

Ergänzt den folgenden Ausschnitt des Erreichbarkeitsgraphen von (N, M_1)! Gebt also die jeweils schaltenden Transitionen an und berechnet die resultierenden Markierungen, die Ihr analog zu der gegebenen Markierung M_1 in der Form $(M(p_1), M(p_2), M(p_3), M(p_4))$ angeben könnt.



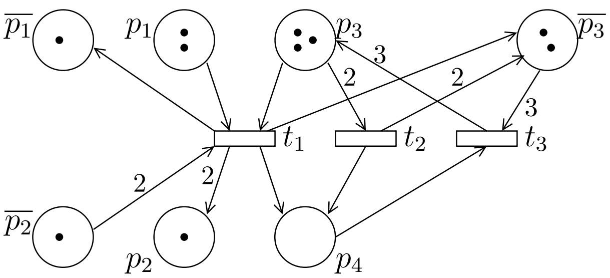
Lösung:



Aufgabe 7

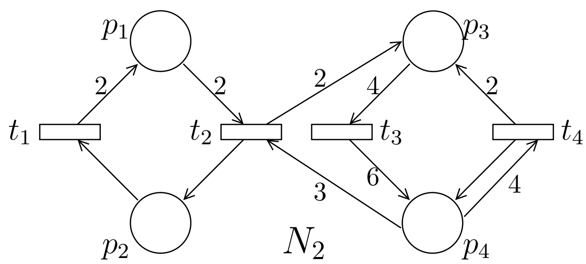
Gebt die Netzkomplementierung (N', M'_1) des Netzes (N, M_1) an!

Lösung:



(N', M'_1)

Es sei nun das folgende P/T-Netz N_2 (mit unbeschränkten Kapazitäten) gegeben:



Aufgabe 8

Ergänzt die folgende Matrix-Darstellung $\underline{N_2}$ von N_2!

$\underline{N_2} = (P, T, \underline{pre}, \underline{post})$ mit

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$$\underline{pre} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\underline{post} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Lösung:

$P = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$

$$\underline{pre} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{post} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Berechnet die P-Invarianten von $\underline{N_2}$!

Lösung:

$\underline{I} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$

$\underline{I}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

$\underline{I}^{\mathrm{T}} \cdot x = \underline{0}$

$x_2 = 2 \cdot x_1$ und $3 \cdot x_4 = 2 \cdot x_3$

Die P-Invarianten sind $\{s \cdot (1,2,0,0)^{\mathrm{T}} + t \cdot (0,0,3,2)^{\mathrm{T}} \mid s,t \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 10

Gebt ein Prozessnetz für das Schalten der Transitionen t_3, t_2, t_1 und t_4 unter der Anfangsmarkierung M mit $M(p_1) = 2$, $M(p_2) = 0$, $M(p_3) = 4$ und $M(p_4) = 1$ an!

Lösung: