Prüfung
im Fach

# TET I

Musterlösung

**Name:** ........................

**Vorname:** ........................

**Matr.-Nr.:** ........................

**Studiengang:** ........................

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

*Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!*

| Aufgabe | **A1** (2) | **A2** (2) | **A3** (3) | **A4** (3) | **A5** (3) | **A6** (3) | **A7** (2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | |
| Aufgabe | **B1** (4) | **B2** (6) | **B3** (6) | **B4** (6) | **B5** (5) | $\Sigma$ P | Note |
| Punkte | | | | | | | |

# HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

*Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.*

Datum: .........

Unterschrift: ...........................

## Aufgabe A1

**a)** Wie lautet das *totale Differential* einer skalaren Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

**b)** Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem totalen Differential und dem Gradienten der Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

**a)**

$$\mathrm{d}\phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z$$

**b)**

$$\mathrm{d}\phi = \nabla\phi \cdot \mathrm{ds} \quad , \quad \mathrm{ds} = \mathrm{d}x\,\mathbf{e}_x + \mathrm{d}y\,\mathbf{e}_y + \mathrm{d}z\,\mathbf{e}_z$$

## Aufgabe A2

Welche Rand- bzw. Stetigkeitsbedingungen gelten für das elektrische Feld an

**a)** idealen Leiteroberflächen ($\kappa \to \infty$)?

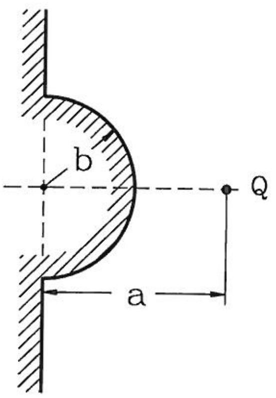
**b)** Sprungstellen der Dielektrizitätskonstanten?

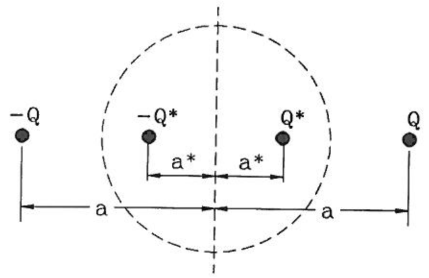
a) $E_t = 0 \quad , \quad D_n = q_F \quad , \quad E_n = q_F/\varepsilon_0$

b) $D_{n1} = \varepsilon_1 E_{n1} = D_{n2} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad , \quad E_{t_1} = E_{t_2}$

## Aufgabe A3

Man gebe die Spiegelersatzanordnung für eine Punktladung $Q$ vor einer leitenden Ebene mit halbkugelförmiger Ausbeulung vom Radius $b$ an.




$$a \cdot a^* = b^2$$

$$Q^* = -\frac{b}{a} Q$$

## Aufgabe A4

a) Wie lauten die Grundgleichungen des elektrostatischen Feldes in *integraler* Form?

b) Wie lauten dieselben Gleichungen in *differentieller* Form?

c) Wie lassen sich die Gleichungen unter a) und b) ineinander überführen?

a)

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \quad , \quad \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = Q \quad \text{(eingeschlossene Ladung)}$$

b)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad , \quad \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = q_V \quad \text{(Raumladungsdichte)}$$

c) Die Gleichungen unter a) und b) lassen sich mit Hilfe der Sätze von STOKES bzw. GAUSS ineinander überführen.

## Aufgabe A5

Aus dem *Durchflutungsgesetz* ist das magnetische Feld eines unendlich langen, geraden, dünnen Leiters, der vom Gleichstrom $I$ durchflossen wird, herzuleiten.

Das Durchflutungsgesetz lautet

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{gesamt}} \quad ,$$

wobei $I_{\text{gesamt}}$ der bei der Integration umschlossene Strom ist. Das magnetische Feld weist aus Symmetriegründen nur eine $\varphi$–Komponente auf. Daher wählt man eine kreisförmige Integrationskontur in deren Mittelpunkt der Leiter liegt und erhält

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} B_\varphi(\varrho)\, \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = I \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi\varrho}} \quad .$$

## Aufgabe A6

Aus der Maxwellschen Gleichung $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ ist die Beziehung für den Strom $i(t)$ einer Leiterschleife mit dem Gesamtwiderstand $R$ herzuleiten, wenn diese von einem zeitlich veränderlichen magnetischen Fluß $\psi_m$ durchsetzt wird.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \xrightarrow{\text{Stokes}} \quad \underbrace{\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}}_{i(t)R} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underbrace{\int_F \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F}}_{\psi_m}$$

$$i(t) = -\frac{\dot{\psi}_m(t)}{R}$$

## Aufgabe A7

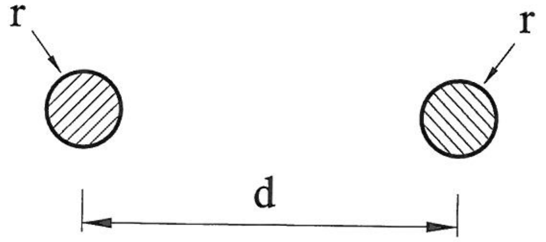
Warum und in welcher Form muß der Durchflutungssatz $\oint \mathbf{H}\,\mathrm{ds} = I_f$ bei zeitlich veränderlichen Feldern modifiziert werden?

Bei zeitlich veränderlichen Feldern ist neben der Leitungsstromdichte $\mathbf{J}_f$ die Verschiebungsstromdichte zu berücksichtigen:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad \overset{Stokes}{\rightarrow} \quad \oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = I_f + \underbrace{\int_F \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F}}_{\text{Verschiebungsstrom}}$$

## Aufgabe B1

Berechne die Kapazität pro Längeneinheit einer aus zwei dünnen Drähten (Radius $r$, Abstand $d$) bestehenden unendlich langen Doppelleitung mit $r \ll d$.




Ersatzanordnung aus zwei Linienladungen $q_L$ und $-q_L$ im Abstand $d$ liefert wegen $r \ll d$ kreisförmige Äquipotentialflächen im Abstand $r$ von den Linienladungen.

Potential der beiden Linienladungen:

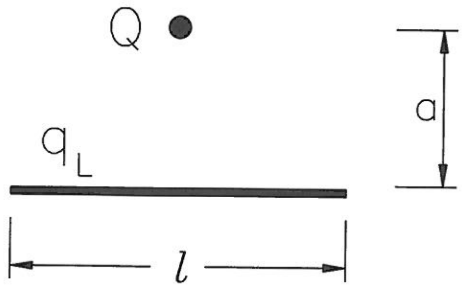
$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r}{c_0} + \frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d-r}{c_0} \\ \phi &= \frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r} \qquad \text{wegen} \quad d-r \approx d \end{aligned}$$

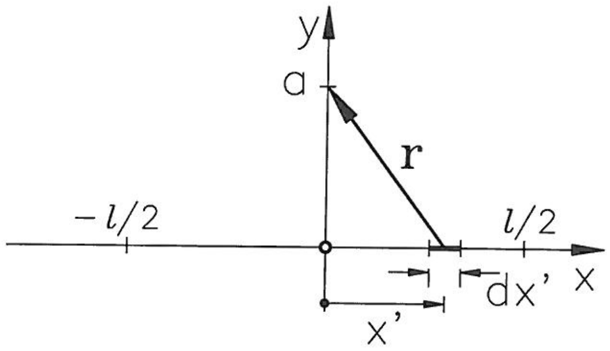
Kapazität pro Längeneinheit:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{q_L}{U} \\ U = 2\phi \quad \Rightarrow \quad C' &= \frac{q_L}{2\,\frac{q_L}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{d}{r}} = \pi\varepsilon\,\frac{1}{\ln\frac{d}{r}} \end{aligned}$$

**Aufgabe B2**

Berechne die Kraft auf eine Punktladung $Q$, die sich *mittig* in der Höhe $a$ über einer Linienladung der Dichte $q_L$ und der Länge $l$ befindet.




$$\mathbf{r} = -x'\,\mathbf{e}_x + a\,\mathbf{e}_y \quad , \quad r = \sqrt{x'^2 + a^2}$$

Die Symmetrie der Anordnung erlaubt die Aussage, daß die gesuchte Kraft nur $y$–gerichtet sein wird. Ein Element der Linienladung mit der Länge $\mathrm{d}x'$ verursacht ein elektrisches Feld am Ort der Punktladung mit der $y$–Komponente

$$\mathrm{d}E_y = \frac{q_L}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{r}}{r^3}\,\mathrm{d}x' \; .$$

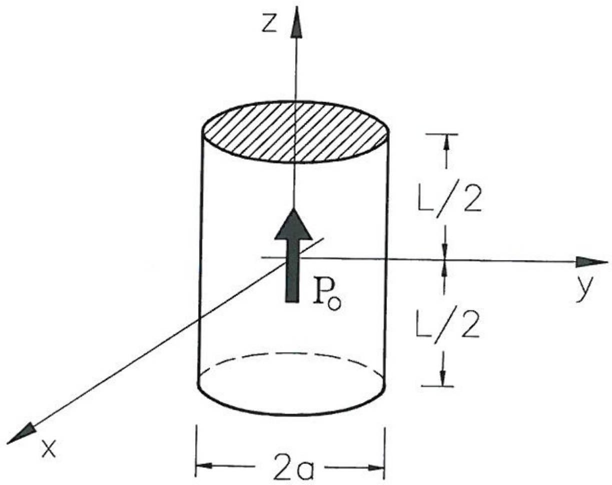
Damit erhält man die gesuchte Kraft als

$$F_y = \frac{Qq_L a}{2\pi\varepsilon_0}\int_0^{l/2} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + a^2}^3}\,\mathrm{d}x' = \frac{Qq_L a}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x'}{a^2\sqrt{x'^2 + a^2}}\right]_0^{l/2} = \frac{Qq_L l}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{\sqrt{l^2/4 + a^2}} \; .$$

Bei der Integration wurde ein weiteres Mal die Symmetrie der Anordnung berücksichtigt.

## Aufgabe B3

Gegeben ist ein homogen polarisierter zylindrischer Stab der Länge $L$ und mit dem Radius $a$.




Man berechne die elektrische Feldstärke auf der $z$–Achse für $z > L/2$.

Der polarisierte Stab kann ersatzweise durch zwei homogene Polarisationsflächenladungen $+q_{F_{pol}} = +P_0$ am Ort der Deckfläche bzw. $-q_{F_{pol}} = -P_0$ am Ort der Bodenfläche des Zylinders beschrieben werden. Eine Polarisationsraumladung existiert wegen $\nabla \cdot \mathbf{P}_0 = 0$ nicht.

1

- Elektrisches Feld einer Flächenladung $q_F$ mit Radius a am Ort z=c:

$$\mathrm{d}E_z = \frac{q_F\,\mathrm{d}F'}{4\pi\varepsilon}\frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

mit

$$\mathrm{d}F' = \varrho'\,\mathrm{d}\varrho'\,\mathrm{d}\varphi' \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{e}_z(z-c) - \mathbf{e}_{\varrho'}\varrho' \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{(z-c)^2 + \varrho'^2} \quad ,$$

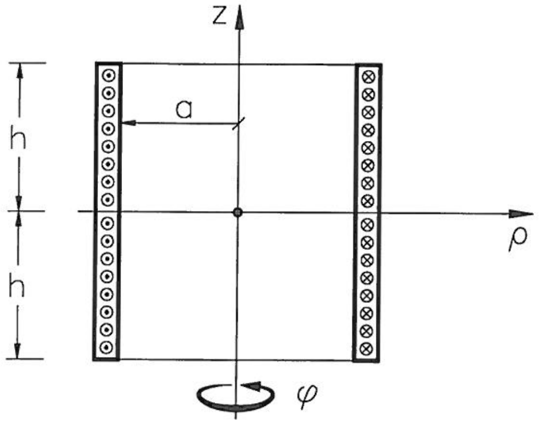
$$\begin{aligned}
E_z(\varrho = 0, z) &= \frac{q_F}{4\pi\varepsilon}\int\limits_{\varrho'=0}^{a}\int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\frac{z-c}{([z-c]^2+\varrho'^2)^{3/2}}\varrho'\,\mathrm{d}\varrho'\,\mathrm{d}\varphi' = \\
&= \frac{q_F}{2\varepsilon}\int\limits_{0}^{a}\frac{z-c}{([z-c]^2+\varrho'^2)^{3/2}}\varrho'\,\mathrm{d}\varrho' = -\frac{q_F}{2\varepsilon}\left.\frac{z-c}{\sqrt{(z-c)^2+\varrho'^2}}\right|_0^a = \\
&= \frac{q_F}{2\varepsilon}\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{1+a^2/(z-c)^2}}\right\} \quad .
\end{aligned}$$

- Feld des Stabes durch Superposition:

$$\boxed{E_{z,Stab} = \frac{P_0}{2\varepsilon}\left\{-\frac{1}{\sqrt{1+a^2/(z-L/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+a^2/(z+L/2)^2}}\right\}}$$

## Aufgabe B4

Man berechne die magnetische Induktion auf der $z$–Achse einer rotationssymmetrischen Spule der Länge $2h$ und mit dem Radius $a$. Die Spule besteht aus einer Wicklungslage und $N$ Windungen und wird mit dem Strom $I$ gespeist. Die Windungen seien so dünn und die Wicklungsdichte sei so hoch, daß statt dessen mit einer homogenen *Flächenstromdichte* $\mathbf{J}_F$ gerechnet werden soll!




Zunächst wird eine äquivalente Flächenstromdichte $J_{F0}$ der dicht bewickelten Spule berechnet

$$\mathbf{J}_{F0} = \frac{NI}{2h}\,\mathbf{e}_\varphi \quad ,$$

so daß eine elementare Kreiswindung mit dem Radius $a$ am Ort $z'$ den differentiellen Strom

$$\mathrm{d}I = J_{F0}\,\mathrm{d}z'$$

führt. Diese Windung liefert nach dem Gesetz von Biot–Savart auf der $z$–Achse den aus Symmetriegründen allein $z$–gerichteten Beitrag zum Magnetfeld

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{4\pi}\oint\frac{(\mathrm{ds}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{e}_z}{r^3}\ .$$

Um überhaupt die Integration durchführen zu können, ist als erstes das Spatprodukt auszuwerten, was zweckmäßigerweise durch zyklisches Vertauschen der Faktoren

$$\mathbf{e}_z\cdot(\,\mathrm{ds}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{e}_z)\cdot\mathrm{ds}$$

gelingt. Wegen $\mathbf{r} = (z-z')\mathbf{e}_z - a\,\mathbf{e}_\varrho$, $\mathrm{ds} = a\,\mathrm{d}\varphi\,\mathbf{e}_\varphi$ wird also $\mathbf{e}_z\cdot(\,\mathrm{ds}\times\mathbf{r}) = a^2\,\mathrm{d}\varphi$ und man erhält für den Feldbeitrag der Kreiswindung

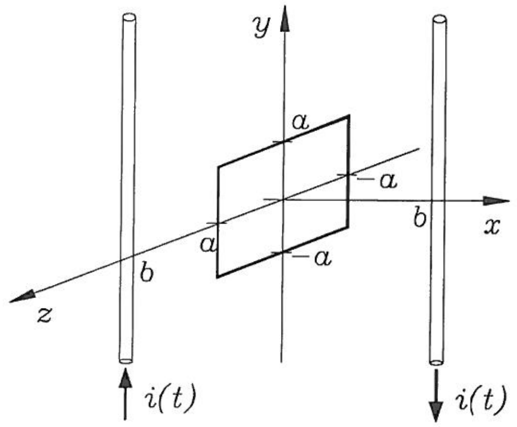
$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}I}{2}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}^{\,3}}\ .$$

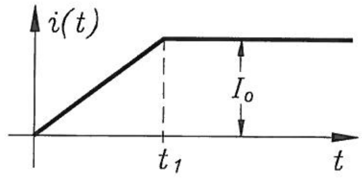
Das Gesamtfeld der Spule auf der Achse ergibt sich dann durch Integration:

$$B_z = \frac{\mu_0 J_{F0}}{2}\int\limits_{-h}^{h}\frac{a^2}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}^{\,3}}\,\mathrm{d}z' = -\frac{\mu_0 J_{F0}}{2}\left(\frac{z-h}{\sqrt{a^2+(z-h)^2}} - \frac{z+h}{\sqrt{a^2+(z+h)^2}}\right)$$

## Aufgabe B5

In eine unendlich lange Doppelleitung (Leiter an den Stellen $x = b$, $z = b$) wird ein Strom eingeprägt, der in der Zeit $0 < t < t_1$ von Null auf den Wert $I_0$ ansteigt und danach konstant bleibt.




Man bestimme den zeitlichen Verlauf des Stromes in einer quadratischen Leiterschleife (Widerstand $R$) der Kantenlänge $2a$, die in der y,z-Ebene liegt.

*Hinweis:* Das magnetische Feld des in der Leiterschleife induzierten Stroms darf vernachlässigt werden.

- Leiter 1 bei $x = b$: $\psi_1 = 0$ (kein resultierender Gesamtfluß)
- Leiter 2 bei $z = b$:

$$\psi_2 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} B_{x2} \mathrm{d}y \mathrm{d}z \quad \text{mit} \quad B_{x2} = -\frac{\mu_0 i(t) a}{\pi}\frac{1}{b-z}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_{ges} = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\mu_0 i(t) a}{\pi}\ln\frac{b+a}{b-a}$$

- induzierter Strom: $i_{ind}R = -\dot{\psi}_{ges}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{i_{ind}(t) = -\frac{\mu_0 a I_0}{R\pi t_1}\ln\frac{b+a}{b-a}}$$

A6

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\int \nabla \times \vec{E}\, d\vec{F} = \int -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\, d\vec{F} \quad (1)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}\, d\vec{F} \quad (2)$$

$$(1) \oint U_{ind} = -\frac{\partial}{\partial t} \Phi_m \quad (2)$$

$$i(t) \cdot R$$

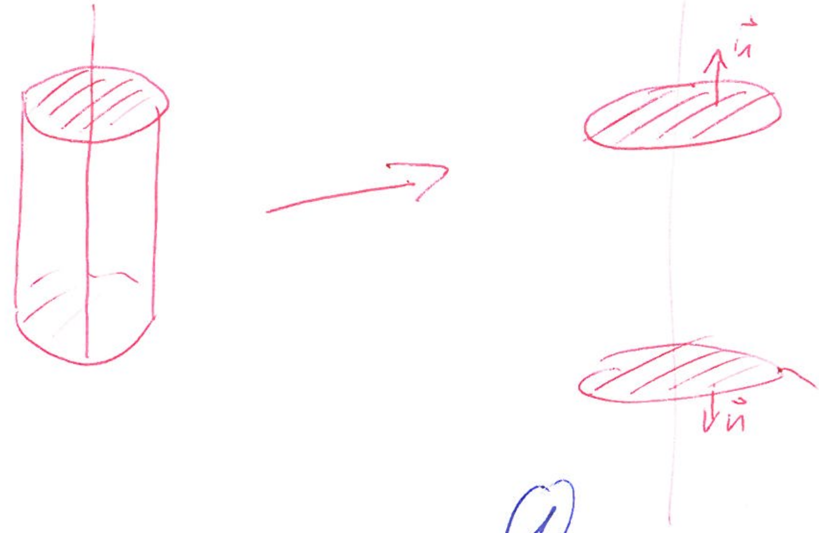
---

A7

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = \underbrace{\int \vec{J}\, dF}_{I} + \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\, dF$$

vernachl.



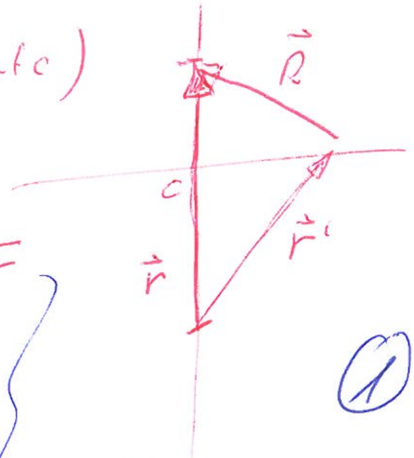
$\sim q_{F,pol} = \vec{n}\cdot\vec{P}$

$q_{V,pol} = 0 = \nabla\cdot\vec{P}$

$q_{F,pol} = \vec{n}\cdot\vec{P}$
$= -q_{F,pol}$ o~

1

Feld einer (+) Flächenladung: (am Ort c)




1

$$d\vec{E} = \frac{q_F}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{R}}{R^3}\cdot dF$$

nur die z-Komponente ist relevant, da nur z-Achse und rotsym.

1

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}' = z\,\vec{e}_z - (c\,\vec{e}_z + \varrho'\vec{e}_\varrho) = (z-c)\,\vec{e}_z - \varrho'\vec{e}_\varrho$$

$$E_{z}(z) = \vec{e}_z \cdot \int \cancel{d\vec{E}}\; d\vec{E}$$

$$= \frac{q_F}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a}\frac{\vec{e}_z\cdot\left[(z-c)\,\vec{e}_z - \varrho'\vec{e}_\varrho\right]}{\sqrt{(z-c)^2+\varrho'^2}^{\,3}}\,\varrho'\,d\varrho'\,d\varphi$$

$$= \frac{q_F}{2\,\cancel{4\pi}\,\varepsilon_0}\,\cancel{2\pi}\int_0^{a}\frac{z-c}{\sqrt{(z-c)^2+\varrho'^2}^{\,3}}\,\varrho'\,d\varrho'$$

2

$$= -\frac{q_F}{2\varepsilon_0}(z-c)\left.\frac{1}{\sqrt{(z-c)^2+\varrho'^2}}\right]_0^{a}$$

$$= -\frac{q_F}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z-c}{\sqrt{(z-c)^2+a^2}} - \frac{z-c}{\sqrt{(z-c)^2}}\right]$$

$$E_{ges} = E_z(L/2) - E_z(-L/2)$$

$$= -\frac{q_F}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z-L/2}{\sqrt{(z-L/2)^2+a^2}} - \underbrace{\frac{z-L/2}{|z-L/2|}}_{-1}\right]$$

$$+ \frac{q_F}{2\varepsilon_0} \quad \frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2+a^2}} - \underbrace{\frac{z+L/2}{|z+L/2|}}_{-1}$$

$E_{ges}$ $\cancel{z}> L/2$

$$= \frac{q_F}{2\varepsilon_0}\left[\frac{z+L/2}{\sqrt{(z+L/2)^2+a^2}} - \frac{z-L/2}{\sqrt{(z-L/2)^2+a^2}}\right] \qquad (1)$$