Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: WS 03/04 Tag der Prüfung: 26.11.2003

1. Teilprüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (3)	**A3** (3)	**A4** (3)	**A5** (2)	**A6** (2)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (5)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

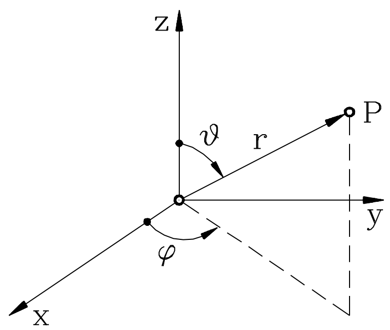
Berechne die folgenden Produkte zwischen den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\varrho$, $\mathbf{e}_\varphi$ in Zylinderkoordinaten und den kartesischen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$:

a) $\mathbf{e}_\varrho \times \mathbf{e}_x$, **b)** $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_y$, **c)** $\mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_z$

a) $\mathbf{e}_\varrho \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z \sin\varphi$, **b)** $\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_y = \cos\varphi$, **c)** $\mathbf{e}_\varrho \cdot \mathbf{e}_z = 0$

Aufgabe A2

Zeichne die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) eines Punktes P in einem kartesischen Koordinatensystem ein und gib den Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) an. Welchen Wertebereich nehmen die Kugelkoordinaten an?



$$x = r\,\sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le r < \infty$$
$$y = r\,\sin\vartheta\sin\varphi \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$z = r\,\cos\vartheta \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Aufgabe A3

Erläutere, wie man mit Hilfe des COULOMBschen Gesetzes und des Superpositionsprinzips die elektrische Feldstärke einer Flächenladung q_F bestimmt.

Es wird zunächst ein Element der Flächenladung mit der differentiellen Ladung $\mathrm{d}q = q_F\,\mathrm{d}F'$ betrachtet. Dieses liefert den differentiellen Feldbeitrag

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\mathbf{R}}{R^3}\ ,$$

wobei der Vektor $\mathbf{R}$ von der Ladung $\mathrm{d}q$ zum betrachteten Aufpunkt zeigt. Nach dem Superpositionsprinzip ist dann das Gesamtfeld der Flächenladung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_F q_F(\mathbf{r}')\,\frac{\mathbf{R}}{R^3}\,\mathrm{d}F'\ ,\ \mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'\ .$$

Aufgabe A4

Wie berechnet man prinzipiell die Kapazität zwischen zwei sehr langen, parallelen kreiszylindrischen Leitern? Skizziere die Ersatzanordnung sowie einige Äquipotentiallinien. Wie heißen diese Äquipotentiallinien?

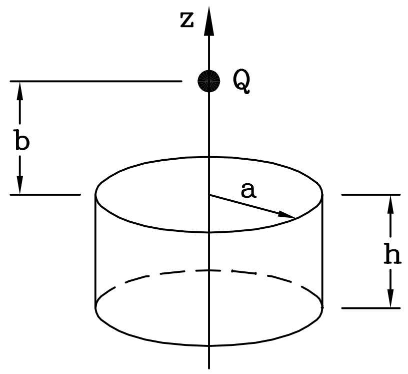
Die Ersatzanordnung besteht aus zwei unendlich langen Linienladungen $\pm q_L$. Die Äquipotentiallinien dieser Anordnung in einer Ebene senkrecht zu den Linienladungen sind sogenannte *Apollonische Kreise*. Man kann nun zwei dieser Äquipotentialflächen als leitende Körper ausführen, die dann mit den kreiszylindrischen Elektroden identifiziert werden können.

Aufgabe A5

Auf der z-Achse befinde sich eine Punktladung Q. Welcher Wert ergibt sich für das Oberflächenintegral

$$\oint_O \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} \ ,$$

wenn $\mathbf{E}$ das elektrische Feld der Punktladung ist und O die Oberfläche des im Bild gezeichneten Zylinders mit dem Radius a und der Höhe h? Die Antwort ist zu begründen.



Da sich keine Ladungen innerhalb der vorgegebenen Oberfläche befinden gilt

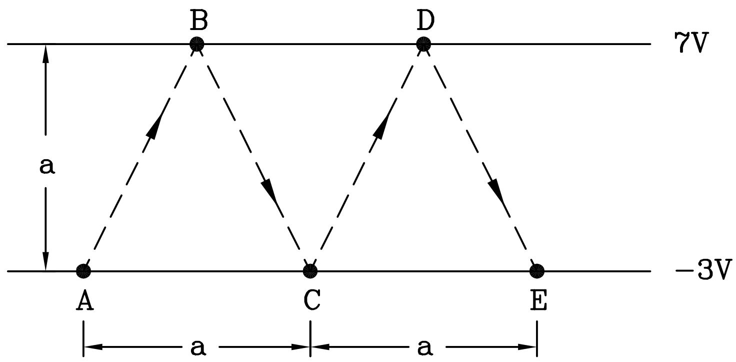
$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = \text{eingeschlossene Ladung} = 0 \ .$$

Aufgabe A6

In einem elektrostatischen Potentialfeld liegen auf zwei parallelen Ebenen die konstanten Potentiale -3V bzw. +7V vor. Was ergibt ein Wegintegral der elektrischen Feldstärke

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

entlang des im Bild eingezeichneten zickzackförmigen Weges ABCDE? Die Antwort ist zu begründen.



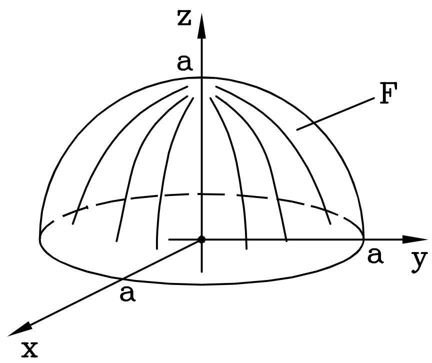
Wegen

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = -\int_S \nabla\phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \phi(A) - \phi(E)$$

und $\phi(A) = \phi(E) = -3V$ verschwindet das Integral.

Aufgabe B1

Es sei r der Betrag des Ortsvektors $\mathbf{r}$. Ferner sei F die obere Hälfte der Oberfläche einer Kugel mit dem Radius a, deren Mittelpunkt im Koordinatenursprung liege.



Berechne das Flächenintegral

$$\int_F \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} \ .$$

Wegen $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ergibt sich zunächst der Gradient zu

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, \mathbf{e}_z \\ &= -\frac{x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y + z\,\mathbf{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3} = -\frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \ . \end{aligned}$$

Das Flächenelement in Kugelkoordinaten lautet

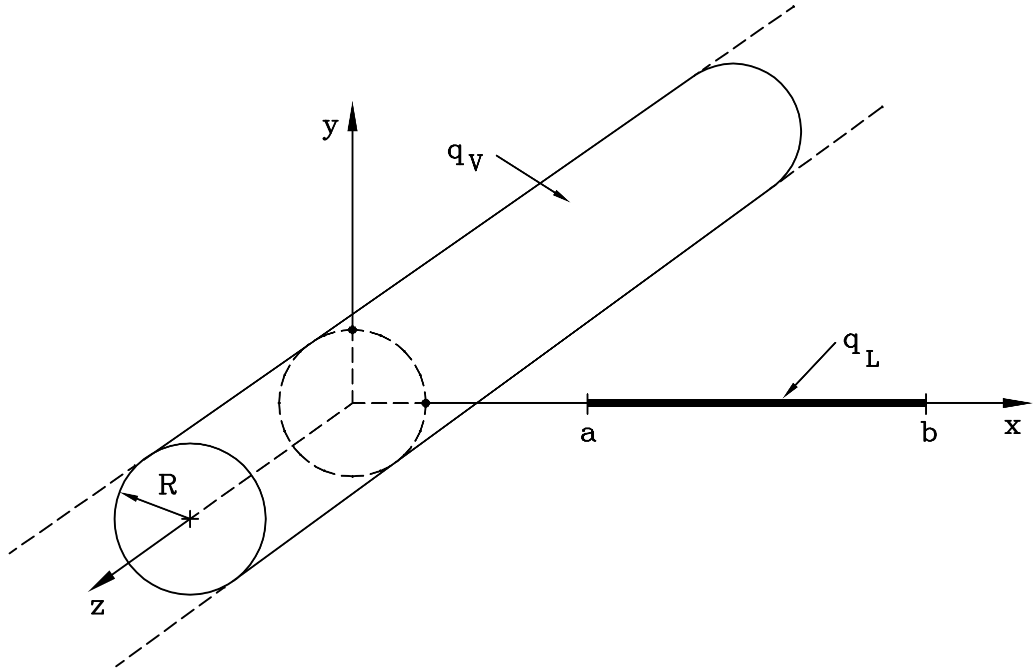
$$\mathrm{d}\mathbf{F} = r^2 \sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi \, \mathbf{e}_r \ .$$

Dann wird aus dem Integral

$$\int_F \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta \ \mathrm{d}\varphi = -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\vartheta \ \mathrm{d}\vartheta = -2\pi \ .$$

Aufgabe B2

Auf der z-Achse befinde sich eine unendlich lange, kreiszylindrische, homogene Raumladung q_V mit dem Radius R, während auf der x-Achse im Bereich $a \leq x \leq b$ eine homogene Linienladung angeordnet ist.



Bestimme die Kraft auf die Linienladung.

Aus dem GAUSSschen Gesetz erhält man zunächst das elektrische Feld der Raumladung

$$\varepsilon_0 \oint_O \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = \int_V q_V \; \mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad 2\pi\varepsilon_0 x E_x = q_V \pi R^2 \quad \rightarrow \quad E_x = \frac{q_V R^2}{2\varepsilon_0} \, \frac{1}{x} \; .$$

Auf ein Element $\mathrm{d}q = q_L \, \mathrm{d}x$ der Linienladung wirkt dann die Kraft

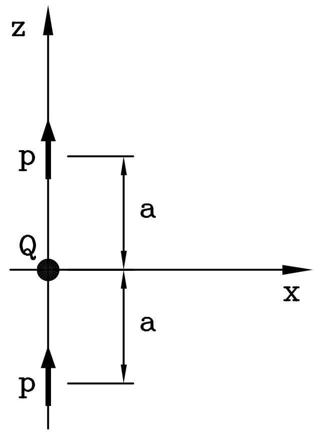
$$\mathrm{d}F_x = dq \, E_x = \frac{q_L q_V R^2}{2\varepsilon_0} \, \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x \; .$$

Die resultierende Kraft ist also

$$F_x = \frac{q_L q_V R^2}{2\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{x} \; \mathrm{d}x = \frac{q_L q_V R^2}{2\varepsilon_0} \; \ln \frac{b}{a} \; .$$

Aufgabe B3

Im kartesischen Koordinatensystem befinden sich an den Orten $(x, y, z) = (0, 0 \pm a)$ zwei z-gerichtete elektrostatische Dipole mit dem Dipolmoment p, während im Koordinatenursprung eine Punktladung Q angebracht ist.



Berechne die Kraft auf die Punktladung.

Man berechnet zunächst das Potential des unteren Dipols auf der z-Achse:

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a+z)^2}$$

Das elektrische Feld infolge des unteren Dipols ist also

$$E_{z1}(0,0,0) = -\left.\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right|_{z=0} = \left.\frac{p}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(a+z)^3}\right|_{z=0} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 a^3} \; .$$

Da der obere Dipol aus Symmetriegründen denselben Feldbeitrag liefert, lautet schließlich die gesuchte Kraft

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_z \frac{Qp}{\pi\varepsilon_0 a^3} \; .$$