Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: WS 04/05 Tag der Prüfung: 24.11.2004

1. Teilprüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (2)	**A3** (2)	**A4** (3)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine vorherige **Anmeldung** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Gegeben seien zwei vektorielle Ortsfunktionen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$. Forme den Ausdruck

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

so um, daß im Resultat nur noch Ausdrücke stehen, in denen der Nablaoperator entweder nur auf das Vektorfeld $\mathbf{A}$ oder nur auf das Vektorfeld $\mathbf{B}$ wirkt. Welche Regeln werden dafür verwendet?

Anwendung der *Produktregel*:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}})$$

Der übergesetzte Pfeil soll die Größe kennzeichnen, auf welche der Nablaoperator wirken soll. *Zyklisches Vertauschen* der Faktoren im Spatprodukt ergibt

$$\nabla \cdot (\overset{\downarrow}{\mathbf{A}} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{A}}) \quad , \quad \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}}) = -\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \overset{\downarrow}{\mathbf{B}})$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})}$$

Aufgabe A2

a) Wie lautet das *totale Differential* einer skalaren Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem totalen Differential und dem Gradienten der Ortsfunktion $\phi(x, y, z)$?

a)

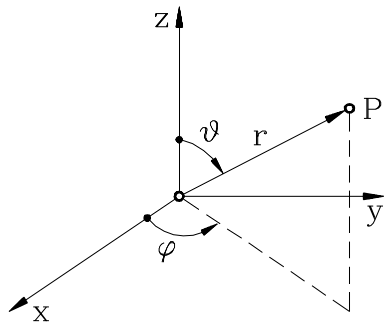
$$\mathrm{d}\phi(x, y, z) = \frac{\partial \phi}{\partial x}\, \mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, \mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial z}\, \mathrm{d}z$$

b)

$$\mathrm{d}\phi = \nabla \phi \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \quad , \quad \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{d}x\, \mathbf{e}_x + \mathrm{d}y\, \mathbf{e}_y + \mathrm{d}z\, \mathbf{e}_z$$

Aufgabe A3

Zeichne die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) eines Punktes P in einem kartesischen Koordinatensystem ein und gib den Zusammenhang zwischen den Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) und den kartesischen Koordinaten (x, y, z) an. Welchen Wertebereich nehmen die Kugelkoordinaten an?



$$x = r\ \sin\vartheta\cos\varphi \qquad 0 \le r < \infty$$
$$y = r\ \sin\vartheta\sin\varphi \qquad 0 \le \vartheta \le \pi$$
$$z = r\ \cos\vartheta \qquad 0 \le \varphi < 2\pi$$

Aufgabe A4

Gegeben sei ein leitender Körper in einem elektrostatischen Feld.

a) Welche Eigenschaften haben Potential und elektrische Feldstärke auf der Oberfläche und innerhalb des leitenden Körpers?

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Oberflächenladungsdichte q_F und dem Potential auf der Oberfläche des leitenden Körpers?

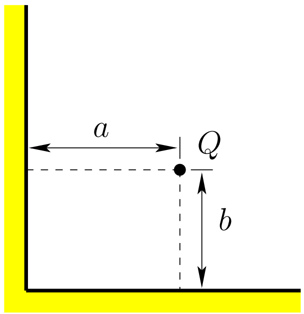
a) Das Potential ist innerhalb des leitenden Körpers konstant. Die Oberfläche bildet eine Äquipotentialfläche. Die elektrische Feldstärke verschwindet im leitenden Körper und sie steht senkrecht auf seiner Oberfläche.

b) Der Zusammenhang zwischen Potential und Oberflächenladungsdichte ist

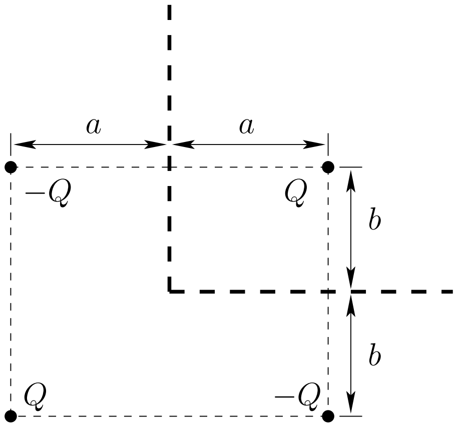
$$q_F = -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_F .$$

Aufgabe A5

Eine Punktladung befindet sich gemäß Bild vor einem leitenden geerdeten Winkel mit unendlich ausgedehnten Schenkeln. Gib eine Ersatzanordnung an, in welcher der leitende Winkel durch Ladungen ersetzt wird. Wie berechnet man prinzipiell die Kraft auf die Punktladung?

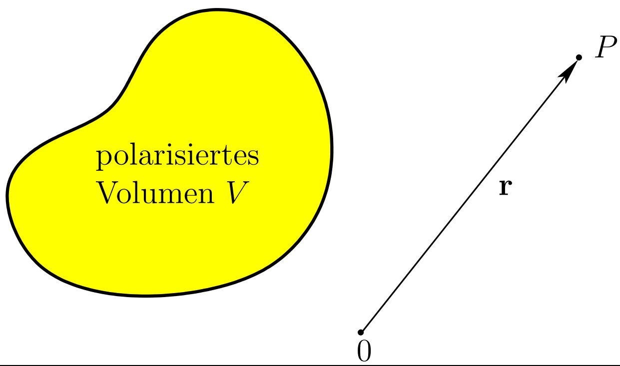


Die beiden Flächen des Winkels dürfen als unendlich ausgedehnte Ebenen angesehen werden. Dann ergibt die Spiegelung an diesen beiden Ebenen die gesuchte Ersatzanordnung.
Die Kraft auf die Punktladung ist $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, wobei $\mathbf{E}$ das äußere elektrische Feld der drei Spiegelladungen ist.



Aufgabe A6

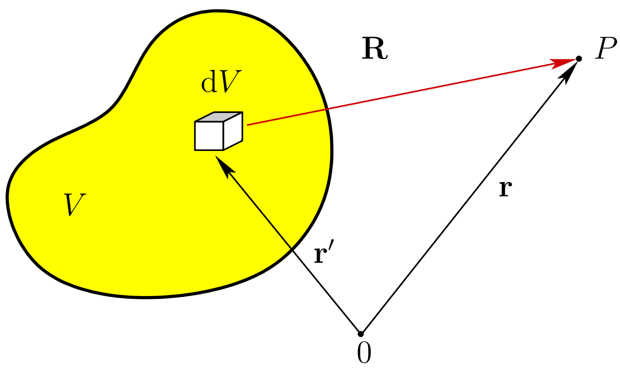
Gegeben ist ein polarisiertes Volumen V mit der Polarisation $\mathbf{P}(\mathbf{r}')$. Wie berechnet man das elektrostatische Potential im Punkt P? Die zur Berechnung notwendigen Größen sind in das Bild einzuzeichnen.
Man gebe außerdem die Einheit der Polarisation an.



$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}}{R^3}\,\mathrm{d}V'$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$$

$$[\mathbf{P}] = \frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$$



Aufgabe B1

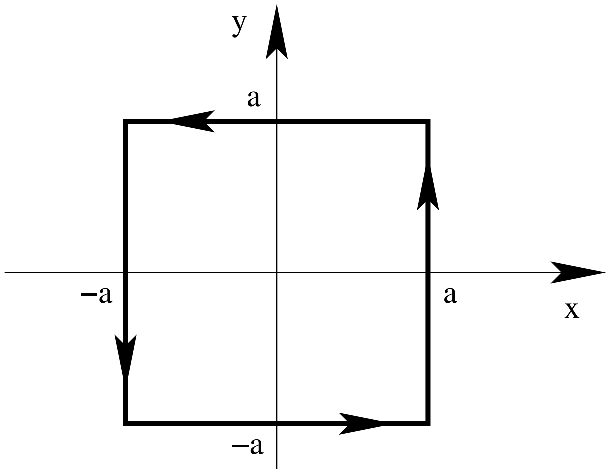
Gegeben ist das folgende Vektorfeld in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{A} = \varrho\,\mathbf{e}_\varphi$$

a) Transformiere das Vektorfeld vollständig in kartesische Koordinaten.

b) Bilde die Rotation des Vektorfeldes $\nabla \times \mathbf{A}$.

c) Wie lautet der Satz von Stokes? Verifiziere den Satz von Stokes für das gegebene Vektorfeld und die im Bild angegebene quadratische Kontur.



a)

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{\varrho} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho}$$

$$\rightarrow \quad \varrho\,\mathbf{e}_\varphi = -y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y$$

b)

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = 2\,\mathbf{e}_z$$

c) Der Satz von Stokes lautet

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$$

Aus dem Flächenintegral wird

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = 2(2a)^2 = \underline{\underline{8a^2}}$$

und aus dem Konturintegral aus Symmetriegründen

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 8\int_0^a A_y(x=a,y)\;\mathrm{d}y = \underline{\underline{8a^2}}\,.$$

Aufgabe B2

a) Leite aus der elektrostatischen Grundgleichung in differentieller Form $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = q_V$ die entsprechende Grundgleichung in integraler Form her.

b) Verwende die integrale Form der Grundgleichung zur Berechnung des elektrischen Feldes einer auf der z-Achse angeordneten unendlich langen, homogenen Linienladung q_L in Zylinderkoordinaten.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem elektrischen Feld und dem elektrostatischen Potential? Berechne das Potential aus dem elektrischen Feld der Linienladung im Aufgabenteil b).

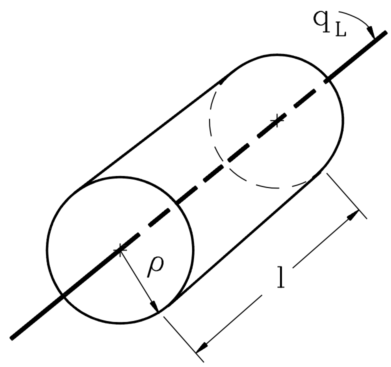
Hinweis: In Zylinderkoordinaten gilt $\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\varrho}\mathbf{e}_\varrho + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{e}_z$.

---

a) Man bildet ein Volumenintegral und erhält aufgrund des Gaussschen Satzes

$$\varepsilon_0 \int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\ \mathrm{d}V = \int_V q_V\ \mathrm{d}V \quad \rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = \text{eingeschlossene Ladung}}$$

b) Man legt dazu zentrisch um die Linienladung einen Kreiszylinder vom Radius ϱ und der Länge l und erhält unter Berücksichtigung der Tatsache, daß Deckel– und Mantelfläche keinen Integrationsbeitrag liefern,



$$q_L l = \varepsilon_0 \int_0^l \int_0^{2\pi} E_\varrho \varrho\ \mathrm{d}\varphi\ \mathrm{d}z = 2\pi\varepsilon_0\, E_\varrho \varrho l \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{E} = \frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0\varrho}\mathbf{e}_\varrho} \quad .$$

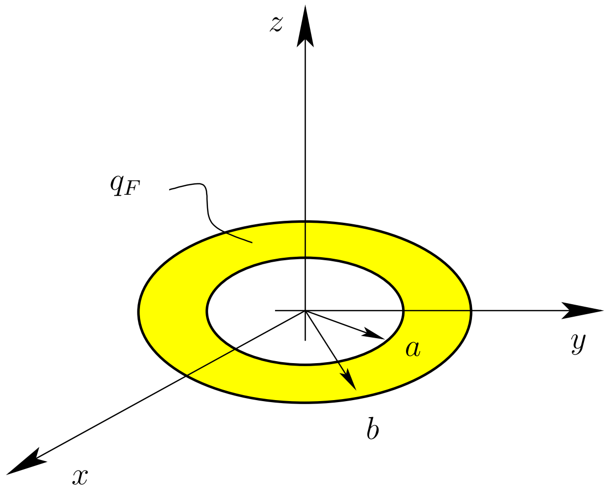
c) Das elektrische Feld ist der negative Gradient des Potentials

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\varrho}\mathbf{e}_\varrho \quad \rightarrow \quad \phi = -\int E_\varrho\ \mathrm{d}\varrho = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\varrho + C = -\frac{q_L}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\varrho}{\varrho_0} \ .$$

ϱ_0 sei ein beliebiger Referenzabstand.

Aufgabe B3

Auf einem Kreisring mit dem Innenradius a und dem Außenradius b befinde sich eine homogene Flächenladung mit der Flächenladungsdichte q_F.



a) Wie groß ist die Gesamtladung des Kreisringes?

b) Berechne die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}(z)$ auf der z-Achse.

---

a) Die Gesamtladung ist

$$Q = \int_F q_F \, \mathrm{d}F = q_F \, \pi (b^2 - a^2) \; .$$

b) Auf der z-Achse gilt

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_z \; .$$

Der elementare Feldstärkebeitrag infolge der differentiellen Ladung $\mathrm{d}Q = q_F \, \mathrm{d}F'$ beträgt zunächst

$$\mathrm{d}E_z = \frac{q_F \, \mathrm{d}F'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

mit

$$\mathrm{d}F' = \varrho' \, \mathrm{d}\varrho' \, \mathrm{d}\varphi' \quad , \quad \mathbf{r} = \mathbf{e}_z \, z - \mathbf{e}_{\varrho'} \, \varrho' \quad \rightarrow \quad r = \sqrt{z^2 + \varrho'^2} \quad ,$$

so daß man für die resultierende Feldstärke den Ausdruck

$$\begin{aligned} E_z(\varrho = 0, z) &= \frac{q_F}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\varrho'=a}^{b} \int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi} \frac{z}{(z^2 + \varrho'^2)^{3/2}} \, \varrho' \, \mathrm{d}\varrho' \, \mathrm{d}\varphi' = \\ &= -\frac{q_F}{2\varepsilon_0} \left. \frac{z}{\sqrt{z^2 + \varrho'^2}} \right|_a^b = \frac{q_F}{2\varepsilon_0} \left\{ \frac{z}{\sqrt{z^2 + b^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right\} \end{aligned}$$

erhält.