Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: WS 2005/06 Tag der Prüfung: 12.01.2006

2. Teilprüfung

im Fach

TET I

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (3)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine vorherige **Anmeldung** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Wie lauten im stationären Strömungsfeld die Stetigkeitsbedingungen für die tangentiale und normale Komponente der Stromdichte $\mathbf{J}$ an der Trennfläche zwischen zwei Gebieten der Leitfähigkeit κ_1 bzw. κ_2? Aus welchen physikalischen Gesetzen folgen die Bedingungen?

$$\oint \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad J_{n1} = J_{n2}$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{t1} = E_{t2} \qquad \Rightarrow \qquad \kappa_2 J_{t1} = \kappa_1 J_{t2}$$

Aufgabe A2

Im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befinde sich ein z-gerichteter elektrostatischer Dipol mit dem Dipolmoment $\mathbf{p}_e$. Man bestimme das Potential am Ort $x = a$, $y = 0$, $z = a$!

Das Potential eines elektrostatischen Dipols ist

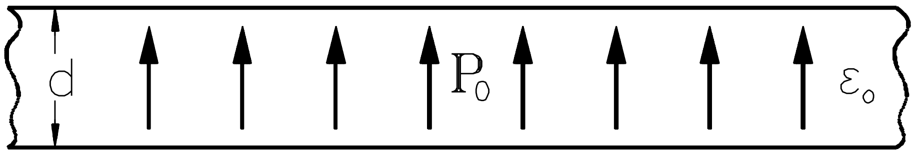
$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} \; .$$

Mit $\mathbf{r} = a\,\mathbf{e}_x + a\,\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{p}_e = p_e\,\mathbf{e}_z$ wird daraus

$$\phi = \frac{p_e}{8\pi\varepsilon_0 \sqrt{2}\, a^2}$$

Aufgabe A3

Eine unendlich ausgedehnte Platte der Dicke d habe die konstante Polarisierung $\mathbf{P}_0$. Wie groß ist die elektrische Feldstärke und die dielektrische Verschiebung innerhalb und außerhalb der Platte?



Ersatzanordnung: zwei Polarisationsflächenladungen $\pm q_{Fpol}$ auf der Ober– bzw. Unterseite der Platte.

Feld außerhalb der Platte:

$$E_a = 0 \quad , \quad D_a = \varepsilon_0 E_a = 0$$

Feld innerhalb der Platte:

$$E_i = -q_{Fpol}/\varepsilon_0 = -P_0/\varepsilon_0 \quad , \quad D_i = \varepsilon_0 E_i + P_0 = 0$$

Aufgabe A4

Gib die Formel zur Berechnung der Energie einer gegebenen elektrostatischen Raumladungsverteilung der Dichte q_V an, wobei

a) nur über den ladungsbehafteten Raum bzw.

b) über den gesamten Raum (also auch außerhalb der Raumladung) integriert werden soll.

a)

$$W_e = \frac{1}{2} \int q_V \, \phi \, \mathrm{d}V$$

b)

$$W_e = \frac{1}{2} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \, \mathrm{d}V$$

Aufgabe A5

Erläutere, wie man näherungsweise die Kapazität einer geraden, schlanken Stabantenne über dem leitenden Erdboden berechnet.

- Die Antenne wird durch eine gerade Linienladung q_L ersetzt.
- Die Linienladung wird am Erdboden gespiegelt.
- Die Äquipotentialflächen in unmittelbarer Umgebung der Linienladung sind langgestreckte Rotationskörper.
- Oberfläche der Antenne $\approx$ Rotationskörper $\phi_A = \text{const.}$
- Kapazität: $C = Q/\phi_A$, mit $Q = q_L\, l$, $l =$ Antennenlänge

Aufgabe A6

Aus dem *Durchflutungsgesetz* ist das magnetische Feld eines unendlich langen, geraden, dünnen Leiters, der vom Gleichstrom I durchflossen wird, herzuleiten.

Das Durchflutungsgesetz lautet

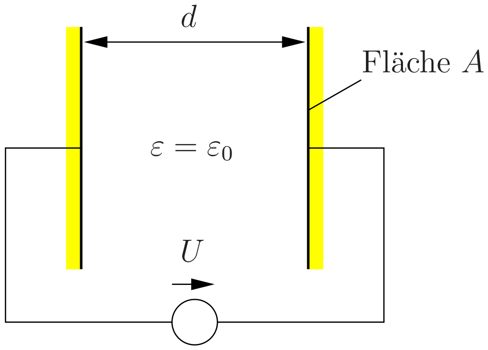
$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \mu_0 I_{\text{gesamt}} \quad ,$$

wobei I_{gesamt} der bei der Integration umschlossene Strom ist. Das magnetische Feld weist aus Symmetriegründen nur eine φ–Komponente auf. Daher wählt man eine kreisförmige Integrationskontur in deren Mittelpunkt der Leiter liegt und erhält

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int\limits_0^{2\pi} B_\varphi(\varrho)\, \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi\, \varrho\, \mathrm{d}\varphi = I \quad \rightarrow \quad \boxed{\mathbf{B} = \mathbf{e}_\varphi \frac{\mu_0 I}{2\pi\varrho}} \quad .$$

Aufgabe B1

Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator. Die Platten haben die Fläche A und den Abstand d voneinander. An die Platten wird eine konstante Spannung U angelegt.



Bestimme die Kraft auf eine der Platten mit Hilfe des Prinzips der *virtuellen Verrückung*. Dabei ist auch auf die Richtung der Kraft einzugehen und im Ergebnis sollen nur die vorgegebenen Parameter auftreten.

Die elektrische Feldenergie im Kondensator ist

$$W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 A d \ ,$$

wobei E das elektrische Feld

$$E = \frac{U}{d}$$

im Kondensator ist. Verschiebt man nun z.B. die rechte Platte um die Strecke δd, so ist dies mit einer Änderung der Feldenergie von

$$\delta W_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 A \,\delta\left(\frac{1}{d}\right) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 U^2 A \left(-\frac{1}{d^2}\right)\ \delta d$$

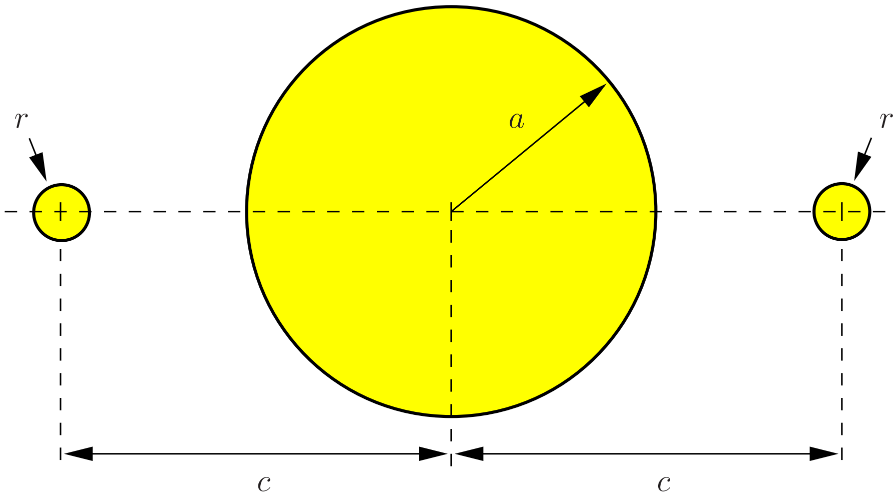
verbunden. Die Kraft auf die rechte Platte in Richtung der vorgenommenen Verrückung wird dann

$$F = +\frac{\delta W_e}{\delta d} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 U^2 A}{d^2} \ .$$

Das Vorzeichen beschreibt also eine Kraft entgegen der Verrückung, d.h. die Platten ziehen sich an.

Aufgabe B2

Mittig zwischen zwei kleinen leitenden Kugeln mit den Radien r liegt eine große leitende Kugel mit dem Radius a. Der Mittelpunktsabstand der kleinen Kugeln zur großen Kugel sei c und es gelte $c \gg r$.



Bestimme die Betriebskapazität der Anordnung, wenn eine Spannungsquelle zwischen den beiden kleinen Kugeln angeschlossen wird und sich die große Kugel isoliert dazwischen befindet.

Legt man eine Spannungsquelle an die beiden kleinen Kugeln an, so erhält z.B. die rechte Kugel die Ladung $+Q$ und die linke Kugel die Ladung $-Q$. Diese können wegen $r \ll c$ als Punktladungen im Mittelpunkt der Kugeln aufgefaßt werden. Durch Spiegelung an der großen Kugel entstehen zusätzlich zwei Ersatzladungen

$$Q_1^* = -\frac{a}{c}\,Q \quad \text{und} \quad Q_2^* = +\frac{a}{c}\,Q$$

mit dem Abständen

$$c_1^* = +\frac{a^2}{c} \quad \text{und} \quad c_2^* = -\frac{a^2}{c}$$

vom Mittelpunkt der großen Kugel. Die Summe beider Ersatzladungen verschwindet, womit die Ladungsfreiheit der großen Kugel garantiert ist.
Das Potential auf der Oberfläche der rechten Kugel ist dann für $r \ll c$

$$\phi_R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2c} - \frac{a}{c}\,\frac{1}{c - a^2/c} + \frac{a}{c}\,\frac{1}{c + a^2/c}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\left(\frac{a}{r} - \frac{a}{2c} - \frac{a^2}{c^4 - a^4}\right) .$$

Die Spannung zwischen den beiden kleinen Kugeln ist aus Symmetriegründen

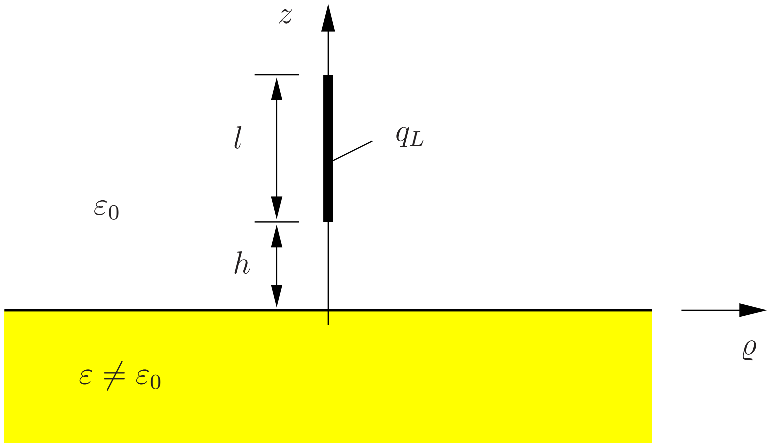
$$U = \phi_R - \phi_L = 2\,\phi_R$$

und schließlich die Kapazität

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a}{\frac{a}{r} - \frac{a}{2c} - \frac{a^2}{c^4 - a^4}}} .$$

Aufgabe B3

In der Höhe h über einem <u>dielektrischen</u> Halbraum befinde sich eine homogene Linienladung q_L mit der Länge l.



Berechne die z-Komponente der elektrischen Flußdichte $D_z(\varrho, z = 0)$ in der Ebene $z = 0$.

Da die Normalkomponente der elektrischen Flußdichte stetig ist, gilt

$$D_z(\varrho, z = 0) = \varepsilon_0 E_z(\varrho, z = +0) = \varepsilon E_z(\varrho, z = -0) \ .$$

Das elektrische Feld auf der Unterseite der Ebene $z = 0$ ist nach dem Spiegelungsgesetz am dielektrischen Halbraum

$$E_z(\varrho, z = -0) = \frac{(1-k)q_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_h^{h+l} \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{e}_z}{R^3} \, \mathrm{d}z' \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \varrho \, \mathbf{e}_\varrho - z' \, \mathbf{e}_z$$

$$\rightarrow \quad E_z(\varrho, z = -0) = -\frac{(1-k)q_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_h^{h+l} \frac{z'}{\sqrt{\varrho^2 + z'^2}^3} \, \mathrm{d}z' \ .$$

Mit der Substitution $u = \varrho^2 + z'^2, \ \mathrm{d}z' = \ \mathrm{d}u/(2z')$ wird daraus

$$E_z(\varrho, z = -0) = \frac{(1-k)q_L}{8\pi\varepsilon_0} \int\limits_{\varrho^2+h^2}^{\varrho^2+(h+l)^2} \frac{-1}{u^{3/2}} \, \mathrm{d}u = \frac{(1-k)q_L}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (h+l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}} \right)$$

und mit $k = \dfrac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + \varepsilon_0}$

$$\boxed{D_z(\varrho, z = 0) = \frac{\varepsilon}{\varepsilon + \varepsilon_0} \frac{q_L}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + (h+l)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2 + h^2}} \right)} \ .$$