Lösung der Probeklausur vom 25.05.2011 (inoffizielle Lösung – KEINE Garantie)

(Zusammengebaut aus alten Aufgaben – die hoffentlich richtig sind)

Aufgabe A1

a)

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \int_F (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = \oint_C \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \quad \text{(für alle Konturen } C\text{)}$$

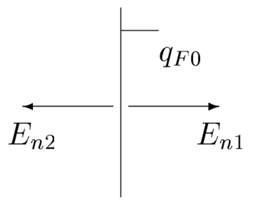
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_V \qquad \rightarrow \qquad \int_V \nabla \cdot \mathbf{D}\ \mathrm{d}V = \oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{O} = Q \quad \text{(eingeschlossene Ladung)}$$

b) Wegen $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ und der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes kann dieses in der Form

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

durch das skalare Potential ϕ beschrieben werden.

Aufgabe A2



Elektrisches Feld der Platte:

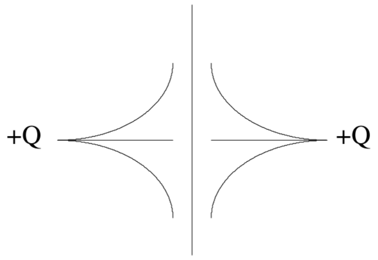
$$\varepsilon_0(E_{n1} - E_{n2}) = q_{F0} = 2\varepsilon_0 E_{n1}$$

$$\Rightarrow \qquad F = \frac{Q q_{F0}}{2\varepsilon_0}$$

Aufgabe A3

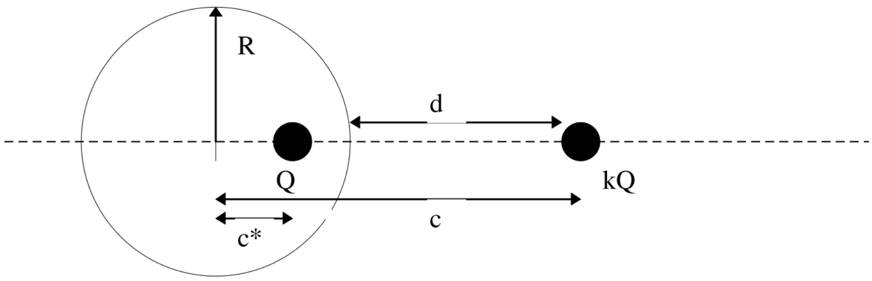
Gegeben sind 2 Punktladungen Q und kQ. Wie muß der Faktor k gewählt werden, damit:
a) in der Mittelebene zwischen den Ladungen die Normalkomponente der elektr. Feldstärke verschwindet ?
b) die Äquipotentialfläche $\Phi = 0$ die Ladung Q kugelförmig umschließt ?

a)



In der Mitte heben sich die beiden E-Feldlinien gerade auf.
$E_n = 0$, also muß k=1 sein.

b)



$$Q = -\frac{r}{c} kQ$$

$$\frac{Q}{k} = -\frac{r}{c} Q$$

weil r<c folgt r/c < 1 somit -r/c > -1 und somit -c/r < -1

$$k = -\frac{c}{r}$$

da ja k= -c/r ist, muß nun k< -1 sein.

Aufgabe A4

Das Potential eines elektrostatischen Dipols ist

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}}{r^3} .$$

Mit $\mathbf{r} = a\,\mathbf{e}_x + a\,\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{p}_e = p_e\,\mathbf{e}_z$ wird daraus

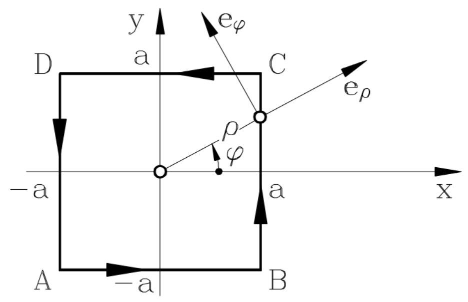
$$\phi = \frac{p_e}{8\pi\varepsilon_0 \sqrt{2}\,a^2}$$

Aufgabe B1

Berechne die Umlaufintegrale $\oint \mathbf{A}_{1,2} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ der Vektorfelder

$$\mathbf{A}_1 = A_0\,\frac{\mathbf{e}_\varrho}{\varrho} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_2 = A_0\,\frac{\mathbf{e}_\varphi}{\varrho}$$

über eine quadratische Kontur.



Zweckmäßigerweise werden die vorgegebenen Vektorfelder auf kartesische Koordinaten transformiert:

$$\mathbf{e}_\varrho = \mathbf{e}_x \cos\varphi + \mathbf{e}_y \sin\varphi \quad , \quad \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_x \sin\varphi + \mathbf{e}_y \cos\varphi$$

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{x}{\varrho} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{y}{\varrho}$$

$$\mathbf{A}_1(x,y) = \frac{A_0}{x^2+y^2}\,(x\,\mathbf{e}_x + y\,\mathbf{e}_y) \quad , \quad \mathbf{A}_2(x,y) = \frac{A_0}{x^2+y^2}\,(-y\,\mathbf{e}_x + x\,\mathbf{e}_y)$$

Aufspaltung des Ringintegrals:

$$\oint = \int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A$$

- Vektorfeld $\mathbf{A}_1$:

$$\int_A^B = -\int_C^D \quad , \quad \int_B^C = -\int_D^A$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{A}_1 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0} \tag{14}$$

- Vektorfeld $\mathbf{A}_2$:

$$\int_A^B = +\int_C^D = A_0 \int_{-a}^{a} \frac{a}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = A_0 \arctan\frac{x}{a}\bigg|_{-a}^{a} = A_0\frac{\pi}{2}$$

$$\int_B^C = +\int_D^A = A_0 \int_{-a}^{a} \frac{a}{a^2+y^2}\,\mathrm{d}y = A_0 \arctan\frac{y}{a}\bigg|_{-a}^{a} = A_0\frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\oint \mathbf{A}_2 \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\pi A_0} \tag{15}$$

Interpretation: $\mathbf{A}_1$ entspricht dem elektrischen Feld einer unendlich langen zylindersymmetrischen Ladungsverteilung im Außenraum (siehe nächste Aufgabe). Es ist also ein *konservatives Feld*, so daß geschlossene Wegintegrale immer verschwinden. $\mathbf{A}_2$ ist kein konservatives Feld sondern ein sogenanntes *Wirbelfeld* ($\nabla \times \mathbf{A}_2 \neq 0$) und entspricht dem magnetischen Feld eines unendlich langen Stromfadens.

Aufgabe B2

Die Kraft wirkt aus Symmetriegründen nur in z–Richtung:

$$F_z = \int_0^h \frac{Q}{h} E_z \, \mathrm{d}z \qquad E_z : \text{Achsenfeld der Ringladung}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_z}{r^3} \, a \, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, a \, \mathrm{d}\varphi$$

$$E_z = \frac{Q}{2\pi a} \, \frac{az}{2\varepsilon(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \quad F_z = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon h} \int_0^h \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}z = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon h} \left[\frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right]$$

Aufgabe B3

Ansatz:

Da die Kapazität C von Ladung Q und Spannung U unabhängig ist, kann die gegebene Spannung zur Berechnung der Kapazität auch weggelassen werden. Die in der Aufgabenstellung gegebene Spannung U ist also uninteressant !
Nach dem gleichen Verfahren, wie in (Aufgabe davor) kann nun wieder eine Kugel mit +Q die andere mit -Q aufgeladen werden, und nach $C = \frac{Q}{U}$ die Kapazität bestimmt werden.

Lösung:

VORHER

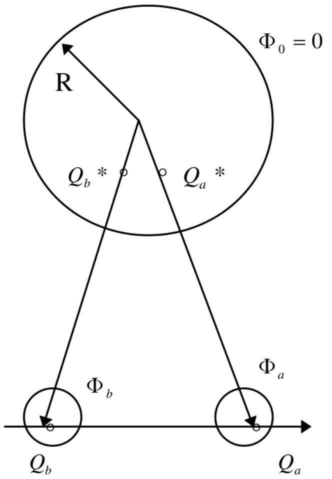
$$\Phi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a - r} \right) \cong \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

$$\Phi_a = -\Phi_b$$

$$C_{vor} = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Phi_a - \Phi_b} = \frac{Q}{2\Phi_a} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}}}}$$

Aufgabe B3 (Fortsetzung...)

NACHER

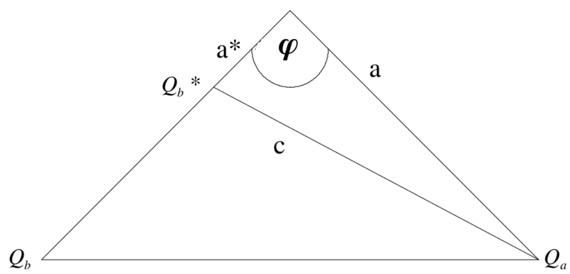


Bestimmung der Abstände aus gegebenen Größen:

$$c^2 = a*^2 + a^2 - 2a*a\cos\varphi^\circ$$

$$c = \sqrt{(\tfrac{R^2}{a})^2 + a^2 - 2R^2\cos\varphi^\circ}$$

$$aa* = R^2$$



$$\Phi_a = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r-a} - \frac{R}{a(a-a*)} + \frac{R}{a\sqrt{a*^2 + a^2 - 2R\cos\varphi^\circ}}\right)$$

$$\Phi_a = -\Phi_b$$

$$C_{nach} = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\Phi_a - \Phi_b} = \frac{Q}{2\Phi_a} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r-a} - \frac{R}{a(a-a*)} + \frac{R}{a\sqrt{a*^2 + a^2 - 2R\cos\varphi^\circ}}}$$

Die beiden Ergebnisse müssten jetzt noch ins Verhältnis gesetzt werden.....