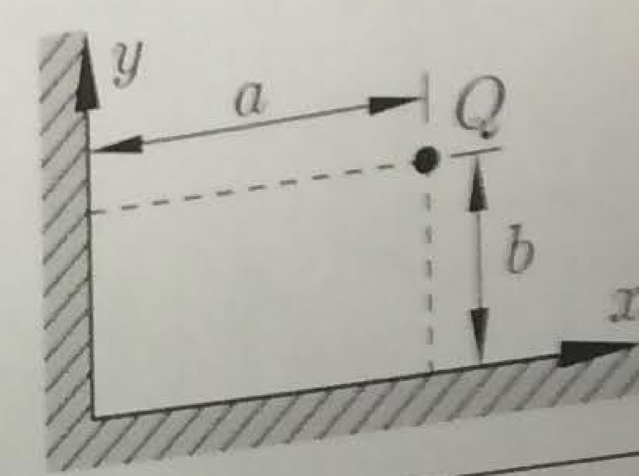
Theoretische Elektrotechnik
Technische Universität Berlin
Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

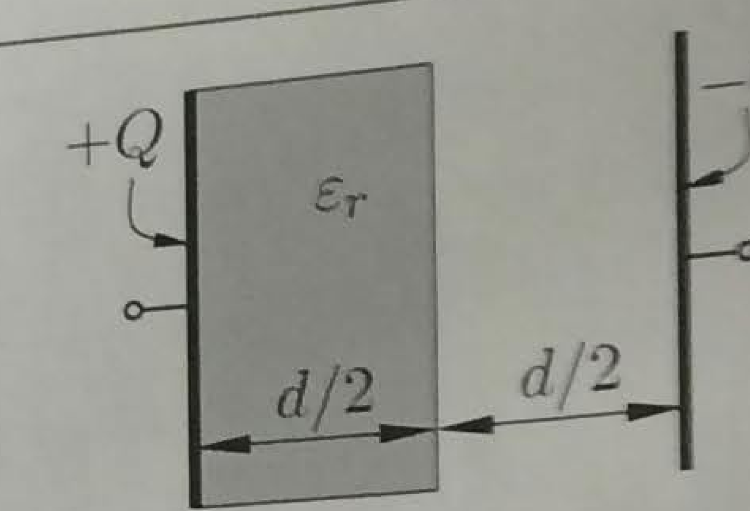
(35 Punkte)

Allgemeines Verständnis

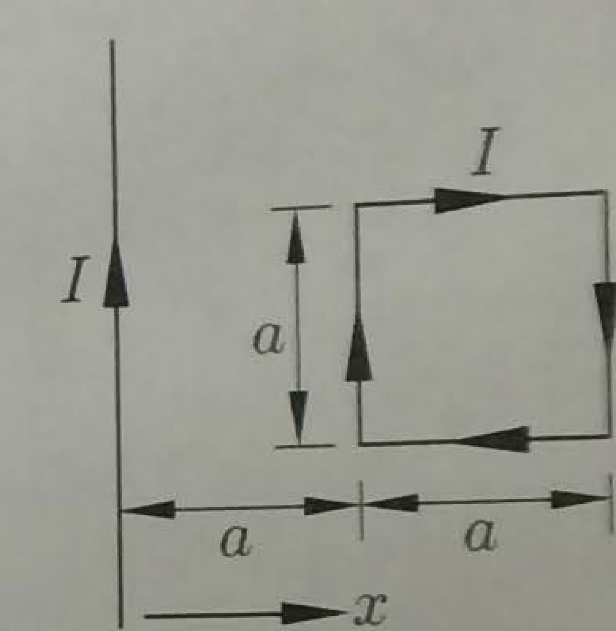
a) Eine Punktladung befindet sich gemäß Bild vor einem leitenden geerdeten Winkel mit unendlich ausgedehnten Schenkeln. Skizzieren Sie eine Ersatzanordnung, in welcher der leitende Winkel durch Ladungen ersetzt wird und geben Sie die Kraft auf die Punktladung an.



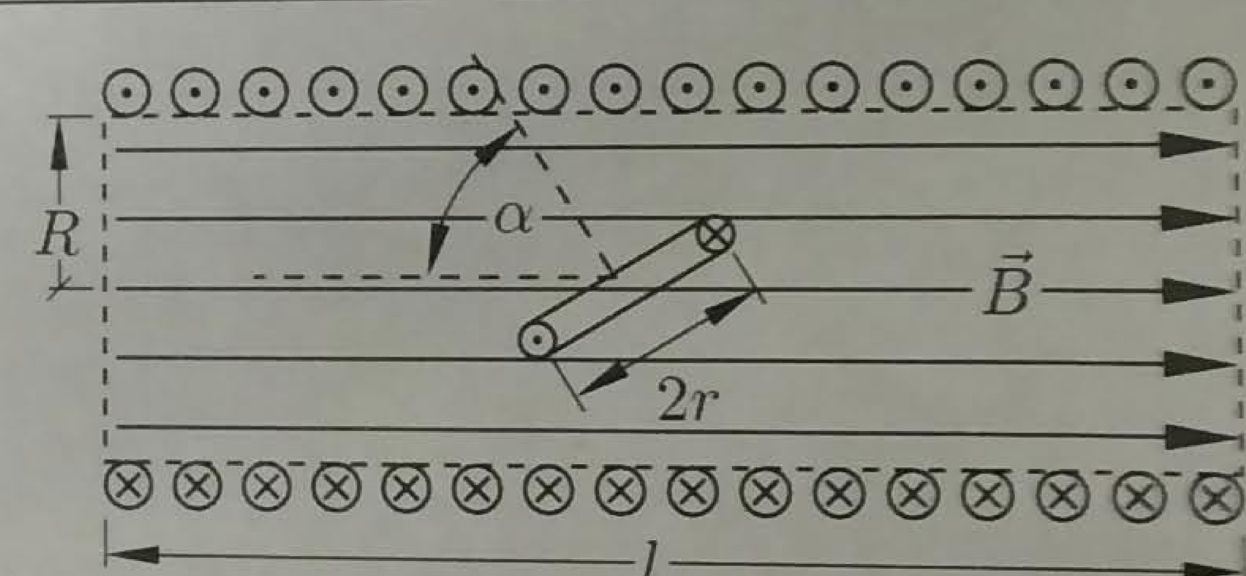
b) Gegeben ist ein idealer Plattenkondensator (Randeffekte vernachlässigbar) mit dem Plattenabstand d und der Plattenfläche A. Der Kondensator ist zur Hälfte mit Dielektrikum ε_r gefüllt und auf den Platten befinden sich die Ladungen $\pm Q$. Wie groß ist die Polarisation $\vec{P}$ des Dielektrikums?



c) Bestimmen Sie die Kraft zwischen einem unendlich langen, vom Gleichstrom I durchflossenen, geraden Leiter und einer quadratischen, ebenfalls vom Strom I durchflossenen, dünnen Leiterschleife der Kantenlänge a. Leiter und Leiterschleife haben gemäß Bild den Abstand a voneinander und liegen in einer Ebene. In welche Richtung wirkt die Kraft?



d) Innerhalb einer Spule (Radius R, N Windungen, Länge l, Randeffekte vernachlässigbar) befinde sich gemäß Bild eine kreisförmige Leiterschleife mit dem Radius r und mit dem Winkel α zur Spulenachse. Wie groß ist die Gegeninduktivität der Anordnung?



e) Begründen Sie die Einführung eines magnetischen Vektorpotentials $\vec{A}$ und leiten Sie aus den Grundgleichungen der Magnetostatik die POISSON-Gleichung für $\vec{A}$ her. Geben Sie dabei auch die Voraussetzungen an. Welche Einheit hat das Vektorpotential?

f) Definieren Sie mit Hilfe der differentiellen Form der ersten MAXWELL'schen Gleichung (Durchflutungsgesetz) die komplexe Permittivität $\underline{\varepsilon}$ eines verlustbehafteten Mediums.

Drücken Sie Real- und Imaginärteil der komplexen Wellenzahl in einem stark verlustbehafteten Medium ($\kappa \gg \omega\varepsilon$) durch die Eindringtiefe δ aus. Wie groß sind Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit einer Welle in diesem Medium für $f = 1\,\mathrm{MHz}$, $\kappa = 10\,\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}$ und $\mu = \mu_0$? (**Hinweis:** Es ist kein Taschenrechner erforderlich!)

g) In einem homogenen Medium (ε, μ, $\kappa = 0$) interferieren zwei ebene Wellen mit der Frequenz f und den elektrischen Feldern

$$\underline{\vec{E}}_1 = -E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}kz}\,\vec{e}_x \quad \text{und} \quad \underline{\vec{E}}_2 = E_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}kz}\,\vec{e}_x\,.$$

E_0 sei reell. Bestimmen Sie aus den Phasoren das *zeitabhängige, magnetische* Gesamtfeld. Definieren Sie dabei auch Wellenzahl, Wellenlänge und Wellenimpedanz einer ebenen Welle.

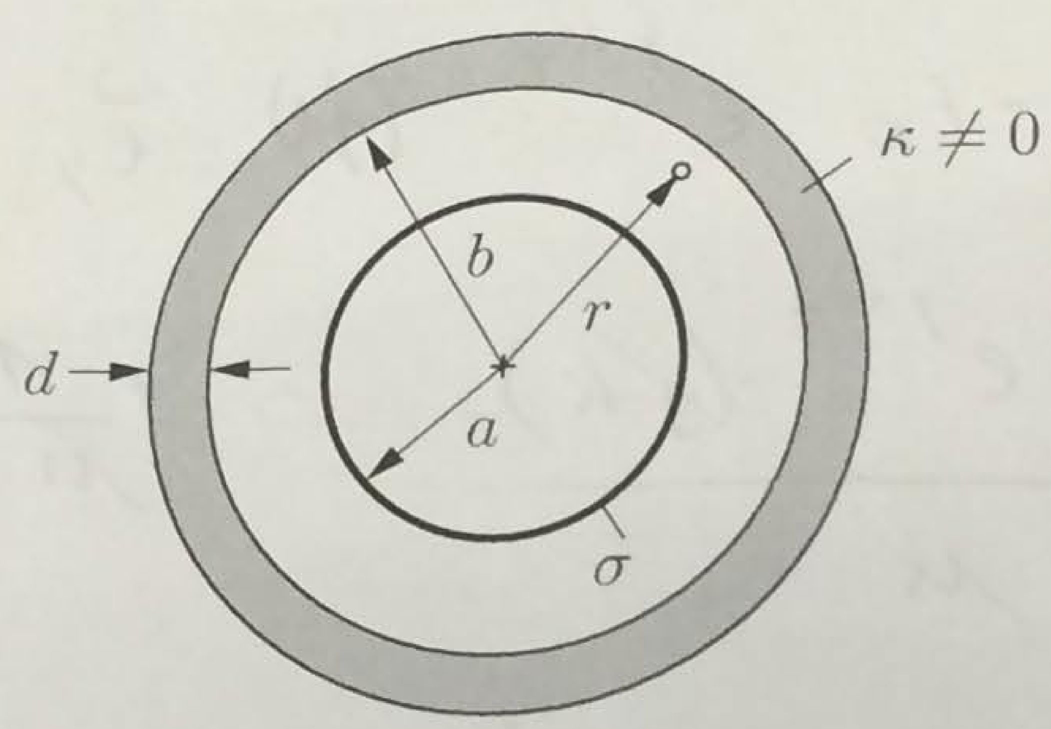
Theoretische Elektrotechnik
Technische Universität Berlin
Prof. Dr.–Ing. R. Schuhmann

(20 Punkte)

Elektrostatik

a) Leiten Sie aus den MAXWELL'schen Gleichungen die Stetigkeitsbedingung für die Normalkomponente der elektrischen Feldstärke an einer Fläche A her, wenn sich auf dieser Fläche eine Flächenladung σ befindet. Der gesamte Raum habe die Permittivität ε_0.

Innerhalb einer leitenden Hohlkugel mit dem Radius b und der Wandstärke d befinde sich eine homogene, kugelförmige Flächenladung σ mit dem Radius a.



b) Berechnen Sie mit Hilfe des GAUSS'schen Gesetzes die elektrische Feldstärke und das Potential im gesamten Raum, wenn die leitende Hohlkugel ungeladen ist.

c) Wie lautet das elektrische Feld und das Potential, wenn die leitende Hohlkugel geerdet ist? Wie groß ist die Influenzladung auf der Hohlkugel?

d) Ermitteln Sie die elektrische Feldenergie der Anordnung im Falle der geerdeten Kugel.

Hinweis: Volumenelement in Kugelkoordinaten

$$\mathrm{d}V = r^2 \sin\vartheta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\vartheta \, \mathrm{d}\varphi$$

Randwertprobleme

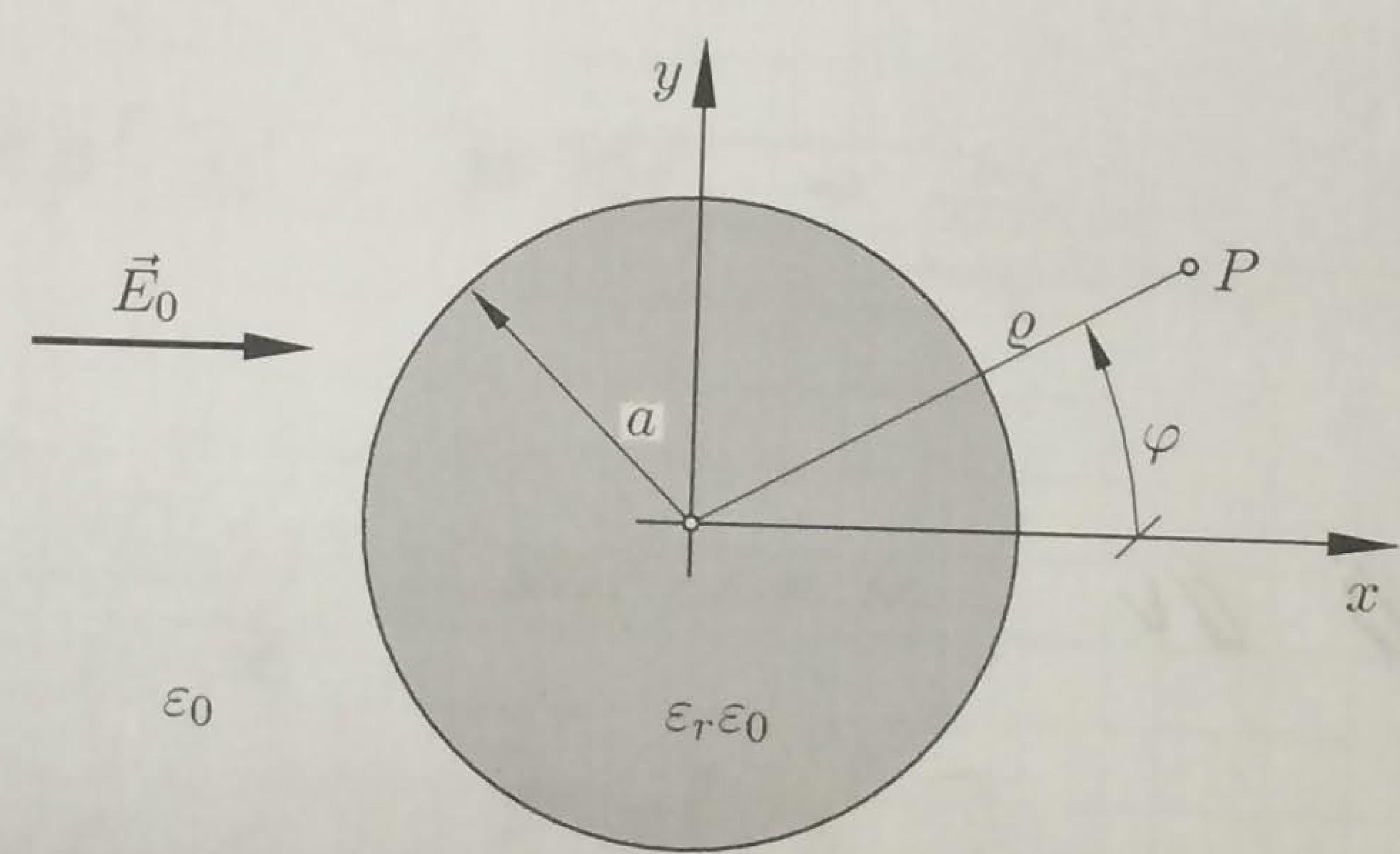
(20 Punkte)

a) Wie lauten die Grundgleichungen der Elektrostatik in differentieller Form?

Begründen Sie, warum das elektrostatische Feld durch ein skalares Potential beschrieben werden kann.

b) Leiten Sie aus den differentiellen Grundgleichungen eine Differentialgleichung für das elektrostatische Potential in einem homogenen Medium mit konstanter Permittivität her. Wie nennt man diese Differentialgleichung sowie ihre spezielle Form bei Raumladungsfreiheit, d.h. für $\varrho = 0$?

Gegeben ist ein dielektrischer Zylinder mit dem Radius a und mit der relativen Permittivität ε_r. Von außen wirkt ein homogenes, elektrostatisches Feld $\vec{E}_0 = E_0\,\vec{e}_x$ ein.



c) Lassen Sie zunächst den dielektrischen Zylinder unberücksichtigt und berechnen Sie das Potential des anregenden homogenen Feldes in kartesischen Koordinaten. Transformieren Sie dieses dann in Polarkoordinaten.

d) Stellen Sie geeignete Lösungsansätze für die LAPLACE-Gleichung in Polarkoordinaten in den Teilräumen $0 \le \varrho \le a$ und $\varrho \ge a$ auf. Achten Sie darauf, dass das Feld für $\varrho \to \infty$ in das homogene Feld $\vec{E}_0$ übergehen muss, und dass die Potentialansätze in beiden Teilräumen dieselbe Abhängigkeit vom Winkel φ haben müssen.

e) Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten in den Potentialansätzen mit Hilfe der Rand- und Stetigkeitsbedingungen und geben Sie die elektrische Feldstärke im Dielektrikum an.

Hinweis: Allgemeiner Lösungsansatz in Polarkoordinaten

$$\Phi(\varrho,\varphi) = (A_0 + B_0 \ln \varrho)\cdot(C_0 + D_0\varphi) + \sum_{p\neq 0}\left[A_p\,\varrho^{\,p} + B_p\,\varrho^{-p}\right]\cdot\left[C_p\cos(p\varphi) + D_p\sin(p\varphi)\right]$$

(25 Punkte)

Quasistationäre Felder

a) Führen Sie in den MAXWELL'schen Gleichungen die quasistationäre Näherung durch und leiten Sie die HELMHOLTZ-Gleichung für den Phasor der magnetischen Feldstärke her.

b) Zeigen Sie anhand des zeitabhängigen POYNTING'schen Satzes

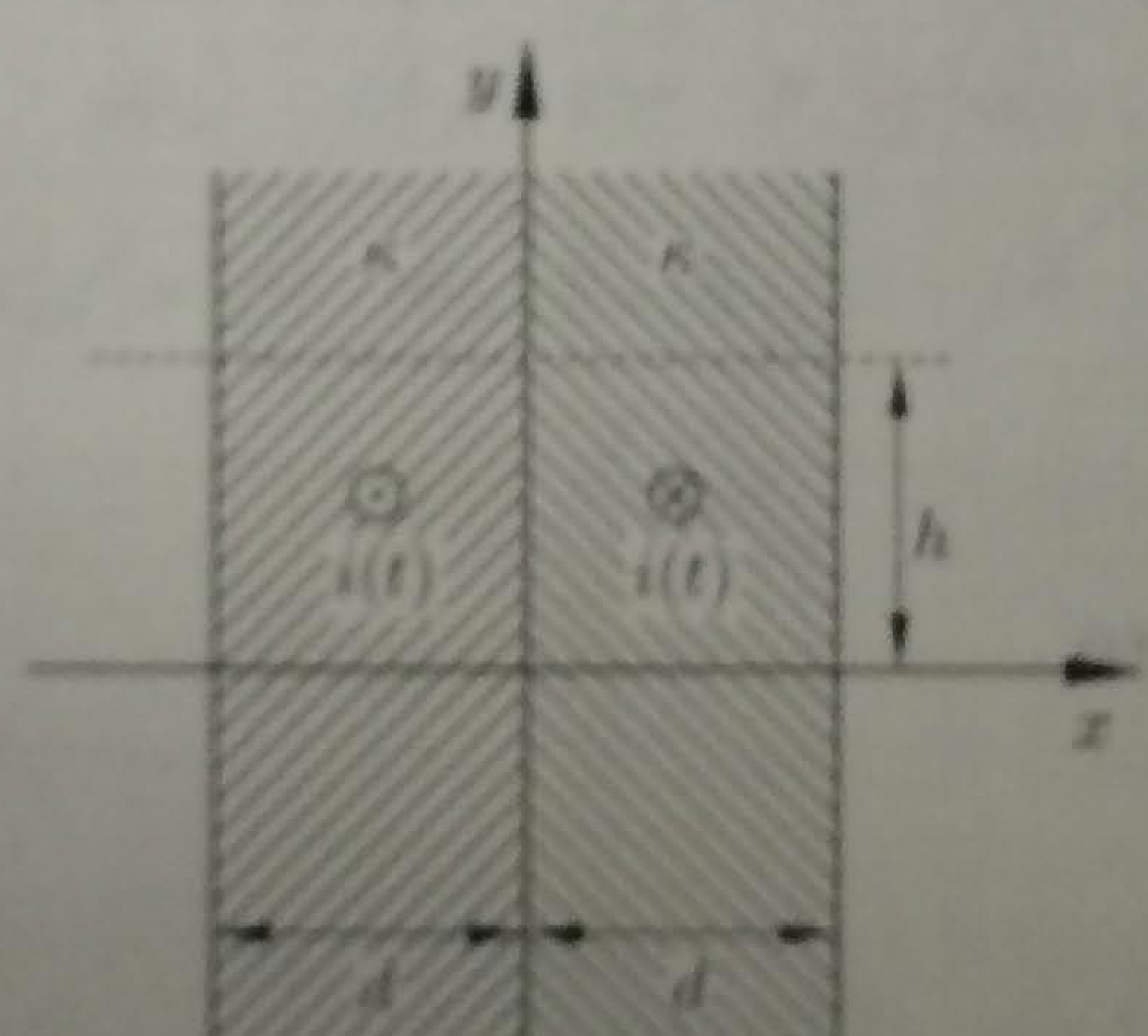
$$-\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) = P_V + \oint_A \vec{S}\cdot \mathrm{d}\vec{A}\,,$$

wie man den zeitlichen Mittelwert der Verluste $\overline{P_V}$ direkt aus dem komplexen POYNTING-Vektor berechnen kann.

Gegeben sind zwei an den Bereichsgrenzen isolierte Massivleiter mit der Dicke d und der Leitfähigkeit κ. Die Leiter werden pro Längenabschnitt h entgegengesetzt vom Wechselstrom

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

durchflossen und dürfen als unendlich ausgedehnt in y- und z-Richtung angenommen werden.



c) Berechnen Sie den Phasor der magnetischen Feldstärke im gesamten Raum.

d) Geben Sie die elektrische Feldstärke an.

e) Ermitteln Sie mit Hilfe des komplexen POYNTING'schen Vektors den zeitlichen Mittelwert der Verlustleistung pro Länge l (in z-Richtung) und Höhe h.