Technische Universität Berlin Institut für Theoretische Elektrotechnik	Prüfungen in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 98 — Tag der Prüfung: 12.05.1998

1. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Musterlösung

- *Bitte die Hinweise auf der Rückseite des Deckblattes beachten!!*

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (2)	**A3** (2)	**A4** (2)	**A5** (3)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)			Σ
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) *Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte* erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift.**

Aufgabe A1

Separiere die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten für eine skalare Ortsfunktion die unabhängig von der Koordinate x sein soll und in positive z–Richtung abklingt!

$$\phi(y,z) = Y(y)\cdot Z(z)$$

$$\nabla^2\phi(y,z) = \nabla^2\left[Y(y)\cdot Z(z)\right] = Z(z)\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + Y(y)\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{Y}\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}}_{=-k^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}}_{=+k^2} = 0$$

$$\frac{1}{Y}\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \quad\rightarrow\quad Y(y) = A\,\sin ky + B\,\cos ky$$

$$\frac{1}{Z}\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 \quad\rightarrow\quad Z(z) = \mathrm{e}^{-kz}$$

$$\boxed{\phi(y,z) = \sum_{k\neq 0}\left(A\,\sin ky + B\,\cos ky\right)\cdot \mathrm{e}^{-kz}}$$

Aufgabe A2

Es sei

$$f_1(x,y) = \sin(px)\cdot\cosh(py)$$

Lösung der LAPLACEgleichung in kartesischen Koordinaten. Begründe, warum dann auch

$$f_2(x,y) = \sin(p[x-a])\cdot\cosh(p[y-b])$$

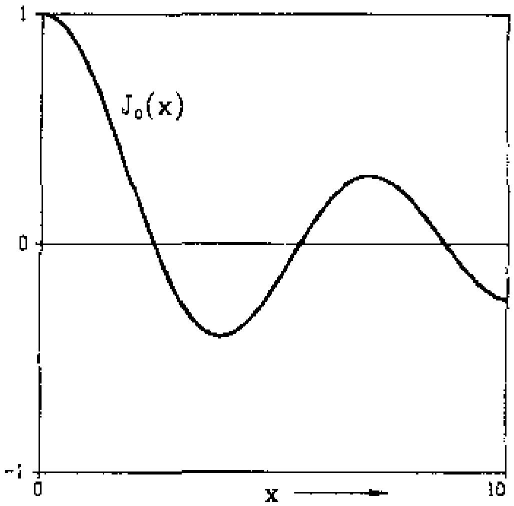
eine Lösung derselben partiellen Differentialgleichung darstellt, wenn a und b beliebige feste Werte sind.

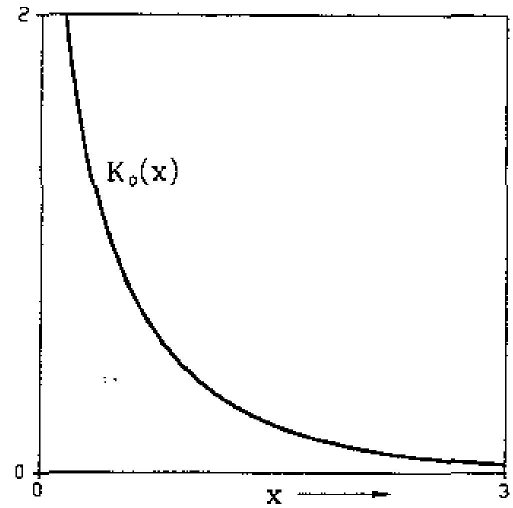
Beide Lösungen erfüllen die LAPLACEgleichung, da sich diese nach Ersetzen von x durch $x-a$ und y durch $y-b$ nicht verändert:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2(x,y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f_1(x-a,y-b)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1(x-a,y-b)}{\partial y^2} \\
&= \frac{\partial^2 f_1(x-a,y-b)}{\partial (x-a)^2} + \frac{\partial^2 f_1(x-a,y-b)}{\partial (y-b)^2} \\
&= \frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1(x,y)}{\partial y^2} = 0
\end{aligned}$$

Aufgabe A3

Man skizziere die prinzipiellen Verläufe der Besselfunktion $J_0(x)$ und der modifizierte Besselfunktion $K_0(x)$!

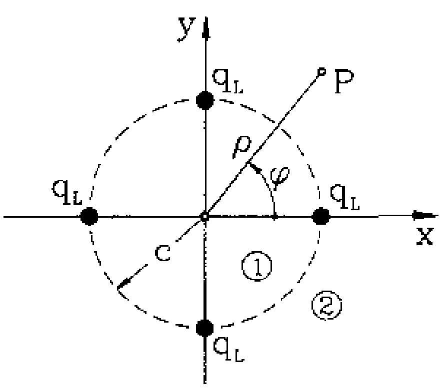




Aufgabe A4

Gegeben ist eine Anordnung aus 4 symmetrisch auf einem Kreis mit dem Radius angeordneten Linienladungen q_L.

a) Welcher der angegebenen Ansätze in Polarkoordinaten beschreibt das Potential im Außenraum korrekt? (Bitte ankreuzen!)



$\phi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \cos n\varphi$	
$\phi^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \sin n\varphi$	
$\phi^{(2)} = A_0 \ln \frac{\varrho}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{c^n}{\varrho^n} \cos n\varphi$	X
$\phi^{(2)} = A_0 \ln \frac{\varrho}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\varrho^n}{c^n} \cos n\varphi$	

b) Läßt sich der Wertebereich für n weiter einschränken?

b) Der Bereich für n läßt sich nach Beachtung der Symmetrie zur y–Achse auf geradzahlige Werte $n = 2, 4, 6, \ldots$ reduzieren.

Aufgabe A5

a) Erläutere die Wirkungsweise eines *elektrolytischen Troges.*

b) Welcher Typ von Randbedingungen ergibt sich für das Potential an den Trogwänden?

c) Nenne Möglichkeiten zur Minimierung des Meßfehlers infolge der Trogwände, bei gleichen Abmessungen des Troges.

a) Beim elektrolytischen Trog nutzt man die Analogie zwischen dem Bild der Verschiebungslinien einer Elektrodenanordnung im dielektrischen Raum und dem Stromlinienbild derselben Elektrodenanordnung in einem Elektrolyten.

b) Die Trogwände bestehen aus isolierendem Material und stellen damit für das Potential *Randbedingungen 2. Art* dar

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_{\text{Trogwand}} .$$

c) Der Meßfehler läßt sich minimieren, wenn man die Trogwände mit eventuell vorhandenen Symmetrieebenen der auszumessenden Anordnung zusammenlegt. Stellt eine solche Symmetrieebene eine Äquipotentialfläche dar, so ist die entsprechende Wand mit einer leitenden Folie zu versehen.

Aufgabe A6

Gegeben ist ein ebenes, von der Koordinate z unabhängiges Potentialfeld $\phi(x, y)$, welches die LAPLACEgleichung erfüllt.

a) Nenne eine sklalare Ortsfunktion $f(x, y)$, deren Konturlinien $f(x, y) = \text{const.}$ den Verlauf der elektrischen Feldlinien beschreiben.

b) Begründe die unter **a)** getroffene Auswahl!

c) Wie ist der Zusammenhang zwischen $f(x, y)$ und $\phi(x, y)$?

a) Die gesuchte skalare Ortsfunktion ist der elektrische Fluß $\psi(x, y)$.

b) Bei raumladungsfreien Feldern (LAPLACEgleichung!) ist der elektrische Fluß $\psi(x, y)$ pro Längeneinheit der Koordinate z, der durch eine beliebige Fläche $F(x, y)$ zwischen einem Fixpunkt P_0 und einem variablen Punkt $P(x, y)$ auf der Feldlinie hindurchtritt, unabhängig von x und y und damit konstant.

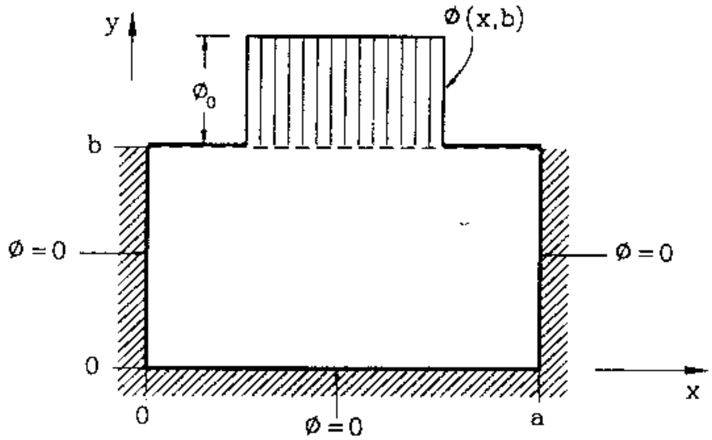
c)

$$\psi(x, y) = \varepsilon \int_F \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{F} = -\varepsilon \int_F \frac{\partial \phi}{\partial n} \, \mathrm{d}F$$

Aufgabe B1

Im kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) sind die Ebenen $x = 0$, $x = a$ und $y = 0$ als leitende geerdete Beläge ausgeführt, während in der Ebene $y = b$ das Potential in der Form

$$\phi(x,b) = \phi_0 \cdot \begin{cases} 1 & , \frac{a}{4} \le x \le \frac{3a}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



vorgegeben ist. Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential im Innenraum des Rechteckzylinders.

- **allgemeiner Potentialansatz in kartesischen Koordinaten:**

$$\phi(x,y) = (A_0 + B_0 x) \cdot (C_0 + D_0 y)$$
$$+ \sum_{k_x \neq 0} [A(k_x)\cos k_x x + B(k_x)\sin k_x x] \cdot [C(k_x)\cosh k_x y + B(k_x)\sinh k_x y]$$

- **homogene Randbedingungen:**

$\phi(0,y) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{A_0 = A(k_x) = 0}$

$\phi(a,y) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{B_0 = 0} \quad , \quad \sin k_x a = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{k_x = \frac{n\pi}{a}} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

$\phi(x,0) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{C(k_x) = 0}$

- **Berücksichtigung der Potentialvorgabe:**

$$\phi(x,b) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \sin\frac{n\pi x}{a} = \phi_0 \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \frac{a}{4} \le x \le \frac{3a}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- **Fourierentwicklung:**

$$\phi_0 \int_{a/4}^{3a/4} \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\frac{n\pi b}{a} \underbrace{\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a} \sin\frac{m\pi x}{a}\,dx}_{\frac{a}{2}\delta_m^n}$$

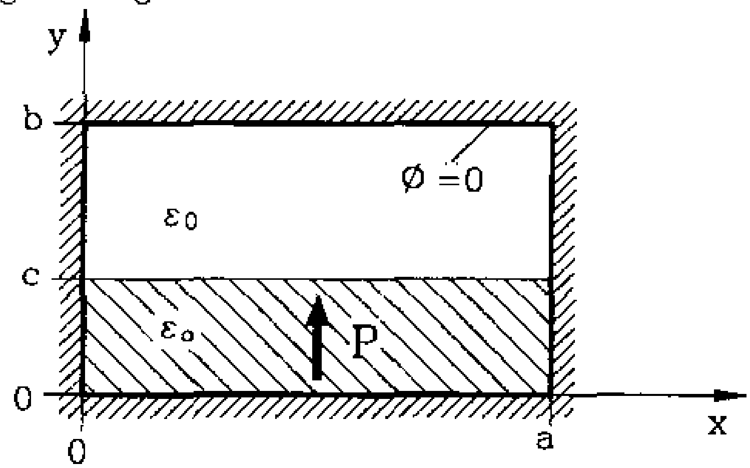
$$\boxed{\frac{\phi(x,y)}{\phi_0} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\cos\frac{n\pi}{4} - \cos\frac{3n\pi}{4}\right] \frac{\sinh\frac{n\pi y}{a}}{\sinh\frac{n\pi b}{a}} \sin\frac{n\pi x}{a}}$$

Aufgabe B2

Die Ebenen $x = 0$ und $x = a$ sowie $y = 0$ und $y = b$ bilden eine leitende geerdete Bewandung. Der Bereich $0 < x < a$, $0 < y < c$ sei in y-Richtung polarisiert:

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_y P_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Bestimme das Potential innerhalb der geerdeten Bewandung! *Hinweis*: Zeige zunächst die Gültigkeit der Laplacegleichung.



Hinweis: Zeige zunächst die Gültigkeit der Laplacegleichung.

- Laplacegleichung: $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2 \phi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\underbrace{\nabla \cdot \mathbf{D}}_{=0} - \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{P}}_{=0}) \stackrel{!}{=} 0$ q.e.d.

- Potentialansätze:

$$0 \leq y \leq c: \ \phi_1 = A \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi y}{a}\ , \ c \leq y \leq b: \ \phi_2 = B \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi(y-b)}{a}$$

- Stetigkeitsbedingungen für $y = c$:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \quad A \sinh \frac{\pi c}{a} = B \sinh \frac{\pi(c-b)}{a}$$

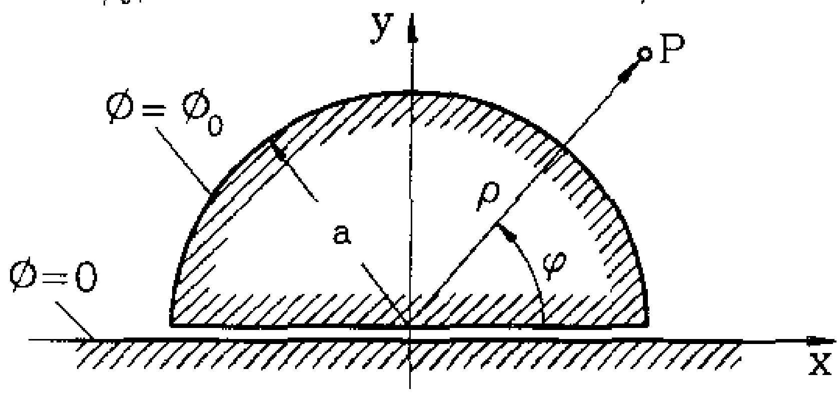
$$D_{y1} = D_{y2} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_0 E_{y1} + P_y = \varepsilon_0 E_{y2} \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{a} A \cosh \frac{\pi c}{a} - \frac{P_0}{\varepsilon_0} = \frac{\pi}{a} B \cosh \frac{\pi(c-b)}{a}$$

- Auflösung nach den unbekannten Konstanten:

$$B = \frac{aP_0}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sinh \frac{\pi(c-b)}{a} \coth \frac{\pi c}{a} - \cosh \frac{\pi(c-b)}{a}} \quad , \quad A = \frac{aP_0}{\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\cosh \frac{\pi c}{a} - \sinh \frac{\pi c}{a} \coth \frac{\pi(c-b)}{a}}$$

Aufgabe B3

Ein leitender Halbzylinder befindet sich isoliert auf einem leitenden Halbraum. Der Halbzylinder habe das Potential ϕ_0, der Halbraum das Potential $\phi = 0$.



Berechne das Potential $\phi(\varrho, \varphi)$ außerhalb des Zylinders.

Laplacegleichung: $\triangle\phi(\varrho,\varphi) = 0$

- Lösungsansatz:

$$\phi(\varrho,\varphi) = A_0 \ln\frac{\varrho}{a} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\left(\frac{\varrho}{a}\right)^n + B_n\left(\frac{a}{\varrho}\right)^n\right\}\{C_n\cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\}$$

- Randbedingungen:

$$\phi(\varrho\to\infty)\to 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = A_n = 0$$

$$\phi(\varrho,\varphi=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_n = 0$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad n = 2\nu - 1 \qquad \nu = 1,2,3\ldots$$

$$\text{Mit} \quad B_nD_n = E_\nu \quad \Rightarrow \quad \phi(\varrho,\varphi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{2\nu-1}\sin(2\nu-1)\varphi$$

$$\phi(a,\varphi) = \phi_0 \quad \to \quad \phi_0 = \sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu \sin(2\nu-1)\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \text{Fourierentwicklung:} \quad \frac{\pi}{4}E_\nu = \phi_0\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2\nu-1)\varphi \mathrm{d}\varphi = \frac{\phi_0}{2\nu-1}$$

$$\boxed{\phi(\varrho,\varphi) = \phi_0\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{2\nu-1}\frac{\sin(2\nu-1)\varphi}{2\nu-1}}$$