| | |
|---|---|
| Technische Universität Berlin<br>Fachgebiet<br>Theoretische Elektrotechnik | Prüfungen in Theoretischer Elektrotechnik |

Semester: SS 2001 Tag der Prüfung: 27.07.2001

Prüfung

im Fach

# TET II

**Name:** ........................

**Vorname:** ........................

**Matr.-Nr.:** ........................

**Studiengang:** ........................

- *Bitte die Hinweise auf der Rückseite beachten!!*

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Aufgabe | **A1** (2) | **A2** (3) | **A3** (2) | **A4** (2) | **A5** (3) | **A6** (2) | **A7** (2) |
| Punkte | | | | | | | |
| Aufgabe | **B1** (6) | **B2** (6) | **B3** (6) | **B4** (6) | **B5** (5) | | $\Sigma$ |
| Punkte | | | | | | | |

# HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 8 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A7, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B5). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 120 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 45 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B5 evt. auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

## Aufgabe A1

Gegeben ist ein Volumen mit der Polarisation $\mathbf{P}(x, y, z)$. Wie lautet die Differentialgleichung für das elektrostatische Potential und wann wird diese zur Laplacegleichung?

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = q_V = 0$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad \rightarrow \quad \boxed{\nabla^2\phi = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\nabla \cdot \mathbf{P}}$$

Für $\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$ wird daraus die Laplacegleichung $\nabla^2\phi = 0$!

## Aufgabe A2

Für eine Funktion $f(x)$ existiere im Bereich $0 \le x \le a$ die Fourierentwicklung

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{a} \quad .$$

Leite die Fourierkoeffizienten $a_n$ her!

Multiplikation der Reihe mit $\sin\frac{m\pi x}{a}$ und Integration von $x = 0$ bis $x = a$:

$$\int_0^a f(x)\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \underbrace{\int_0^a \sin\frac{n\pi x}{a}\,\sin\frac{m\pi x}{a}\,\mathrm{d}x}_{\frac{a}{2}\,\delta_m^n}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{a}\,\mathrm{d}x}$$

## Aufgabe A3

Welche der folgenden skalaren Ortsfunktionen in Kugelkoordinaten sind Lösung der LAPLACEgleichung? (Bitte ankreuzen!)

| | |
|---|---|
| $\phi_1(r,\vartheta) = \frac{1}{r^2}\cos\vartheta$ | |
| $\phi_2(r,\vartheta) = \frac{1}{r}\sin\vartheta$ | |
| $\phi_3(r,\vartheta) = \frac{1}{r}$ | |
| $\phi_4(r,\vartheta) = r$ | |

Gib, wo möglich, physikalische Anordnungen an, die durch solche Funktionen beschrieben werden.

$\phi_1(r,\vartheta)$ ist der Potentialverlauf eines elektrostatischen Dipols und $\phi_3(r,\vartheta)$ ist das normierte Potential einer Punktladung.

## Aufgabe A4

Was versteht man unter der cut-off Frequenz und welche longitudinale Abhängigkeit haben elektromagnetische Felder im Hohlleiter oberhalb und unterhalb der cut-off Frequenz?

- Unter der cut-off Frequenz versteht man die Grenzfrequenz (für einen gegebenen Ausbreitungsmode), unterhalb derer keine Wellenausbreitung erfolgt.
- Im Hohlleiter gilt z.B. für das elektrische Feld

$$\begin{array}{lll} \mathbf{E} & \sim & E_0\,\mathrm{e}^{-k_z z} \quad \text{unterhalb } \omega_c \\ \mathbf{E} & \sim & E_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z z} \quad \text{oberhalb } \omega_c \end{array} \quad , \qquad k_z \text{ reell}$$

## Aufgabe A5

a) Welche elektromagnetischen Feldkomponenten existieren in Kugelkoordinaten für einen $z$-gerichteten Hertzschen Dipol im Fernfeld?

b) Wie lautet im Fernfeld der Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld eines Hertzschen Dipols?

c) Wie klingen die elektrische und die magnetische Feldstärke eines Hertzschen Dipols im Fernfeld mit dem Abstand $r$ ab?

**a)** Ein Hertzscher Dipol besitzt im Fernfeld eine $H_\varphi$- und eine $E_\vartheta$-Komponente.

**b)** Im Fernfeld eines Hertzschen Dipols gilt $\dfrac{E_\vartheta}{H_\varphi} = Z_0 = \sqrt{\dfrac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ .

**c)** Die elektrische und die magnetische Feldstärke eines Hertzschen Dipols klingen im Fernfeld mit dem reziproken Abstand $r$ ab, $E_\vartheta \quad , \quad H_\varphi \quad \sim \quad \dfrac{1}{r}$ .

## Aufgabe A6

Eine ebene Welle breite sich mit der Amplitude $E_0$ in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{e}_a$ aus. Gib den Phasor des elektrischen Feldes sowie den zeitlichen Mittelwert der Leistung an, die durch eine Einheitsfläche transportiert wird, deren Flächennormale mit $\mathbf{e}_a$ den Winkel $\gamma$ einschließt!

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \, \mathrm{e}^{\,-\mathrm{j}k\mathbf{e}_a\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\overline{P} = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0} E_0^2 \, \cos\gamma \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\mu/\varepsilon}$$

## Aufgabe A7

Wie lautet

**a)** das retardierte Skalarpotential einer zeitveränderlichen Punktladung $Q(t)$?

**b)** das retardierte Vektorpotential eines zeitveränderlichen Stromelementes $I(t)\Delta s$?

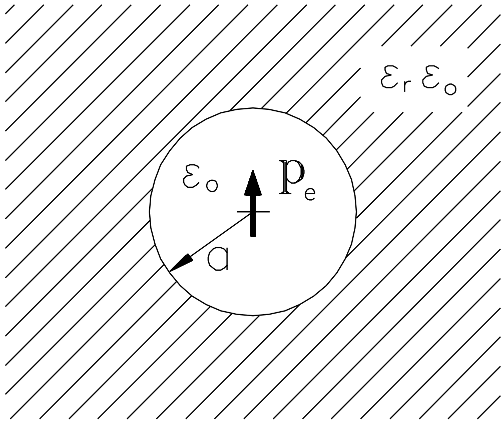
**a)** $$\phi_{ret} = \frac{Q\left(t - \frac{R}{c}\right)}{4\pi\varepsilon R}$$

**b)** $$\mathbf{A}_{ret} = \frac{\mu \mathbf{I}\left(t - \frac{R}{c}\right)\Delta s}{4\pi R}$$

$R$ ist der Abstand zwischen Quelle und Aufpunkt und $\frac{R}{c}$ die Laufzeit einer elektromagnetischen Freiraumwelle zwischen diesen Punkten.

## Aufgabe B1

Gegeben ist ein dielektrisches Medium ($\varepsilon_r$) mit einem kugelförmigen Hohlraum vom Radius $a$. Im Mittelpunkt des Hohlraumes befinde sich ein elektrostatischer Dipol $\mathbf{p}_e = \mathbf{e}_z p_0$. Bestimme das Potential im Hohlraum!




**Potential des Dipols im freien Raum** $\quad \phi_D = \dfrac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\vartheta = \dfrac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} P_1(\cos\vartheta)$

**Das Störfeld infolge des Dielektrikums** ist Lösung der Laplacegleichung in Kugelkoordinaten.
Wegen $\phi_D \sim P_1(\cos\vartheta)$ wird nur das erste Glied $n = 1$ der Lösungsumme angesetzt:

$$\text{innen}: \ \phi_{S1} = A\frac{r}{a}\cos\vartheta \quad , \quad \text{außen}: \ \phi_2 = B\frac{a^2}{r^2}\cos\vartheta$$

$$\phi_1 = \phi_D + \phi_{S1}$$

**Randbedingungen**

$$(i) \quad \phi_1(r=a) = \phi_2(r=a) \rightarrow A + \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = B$$

$$(ii) \quad \varepsilon_r \left.\frac{\partial\phi_2}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial\phi_1}{\partial r}\right|_{r=a} \rightarrow -\varepsilon_r B\frac{2}{a} = -2\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{A}{a}$$

$$-\frac{2\varepsilon_r}{a}\left(A + \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\right) = -2\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + \frac{A}{a}$$

$$\rightarrow \quad A = \frac{2p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\frac{1-\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r} \quad , \quad \phi_1 = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left\{\frac{a^2}{r^2} + \frac{r}{a}2\frac{1-\varepsilon_r}{1+2\varepsilon_r}\right\}\cos\vartheta$$

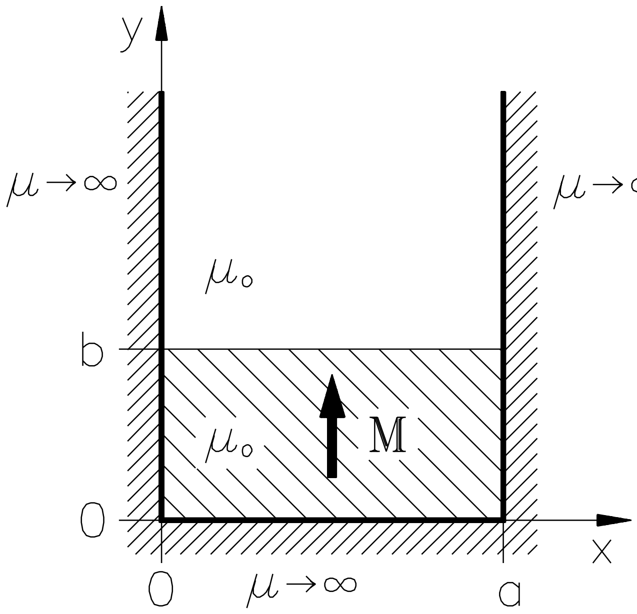
## Aufgabe B2

Die Ebenen $x = 0$, $x = a$ sowie $y = 0$ bilden die Wände einer Nut im ansonsten hochpermeablen Gesamtraum. Der Bereich $0 < x < a$, $0 < y < b$ sei in $y$-Richtung magnetisiert:

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_y M_0 \sin \frac{\pi x}{a}$$

Bestimme das magnetische Skalarpotential innerhalb der Nut!

*Hinweis*: Zeige zunächst die Gültigkeit der Laplacegleichung für das magnetische Skalarpotential.




**Laplacegleichung** $\quad \nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla^2 \phi_m = \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{B}}_{=0} - \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{M}}_{=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad$ q.e.d.

**Potentialansätze**

$$0 \le y \le b: \ \phi_{m1} = A \sin \frac{\pi x}{a} \sinh \frac{\pi y}{a} \ , \ y \ge b: \ \phi_{m2} = B \sin \frac{\pi x}{a} \exp \left[ -\frac{\pi}{a}(y-b) \right]$$

**Stetigkeitsbedingungen** für $y = b$

$$H_{x1} = H_{x2} \quad \rightarrow \quad A \sinh \frac{\pi b}{a} = B$$

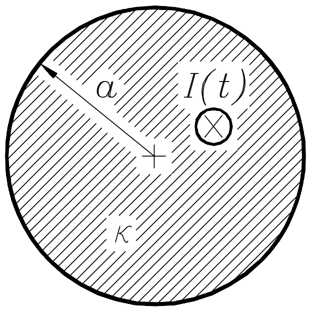
$$B_{y1} = B_{y2} \quad \rightarrow \quad H_{y1} + M_y = H_{y2} \quad \rightarrow \quad -\frac{\pi}{a} A \cosh \frac{\pi b}{a} + M_0 = \frac{\pi}{a} B$$

**Auflösung nach den unbekannten Konstanten**

$$B = \frac{aM_0}{\pi} \frac{1}{1 + \coth \frac{\pi b}{a}} \quad , \quad A = \frac{aM_0}{\pi} \frac{1}{\sinh \frac{\pi b}{a} + \cosh \frac{\pi b}{a}}$$

## Aufgabe B3

Ein unendlich langer metallischer Draht der Leitfähigkeit $\kappa$ wird von einem Wechselstrom $I(t) = I_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ durchflossen. (Verschiebungsströme sollen vernachlässigt werden.)
a) Stelle die Differentialgleichung für das elektrische Feld auf und gib ihre allgemeine Lösung in Zylinderkoordinaten an.
b) Bestimme die freien Konstanten mit Hilfe von Regularitätsüberlegungen und dem Durchflutungsgesetz.




a) Maxwellsche Gleichungen unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H} \quad , \quad \mathbf{J} = \kappa\mathbf{E}$$

Daraus wird $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mu\kappa\mathbf{E} = \nabla \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{E})}_{=0} - \Delta\mathbf{E}$.

Aus Symmetriegründen gilt: $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z\, E(\varrho)$

Differentialgleichung für $E(\varrho)$:

$$\Delta E(\varrho) = \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho}\left(\varrho\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varrho}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varrho} = \mathrm{j}\omega\mu\kappa E$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}u^2} + \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}u} + E = 0 \quad , \quad u = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\;\varrho$$

mit der allgemeinen Lösung $E(\varrho) = A\, J_0(u) + B\, N_0(u)$.

b) Endliche elektrische Feldstärke für $\varrho = 0 \quad \rightarrow \quad B = 0$.

Magnetische Feldstärke:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\varrho} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\, A\, \frac{\mathrm{d}J_0(u)}{\mathrm{d}\varrho} = \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\,\Big(-J_1(u)\Big)\, A$$

Durchflutungssatz an der Stelle $\varrho = a$:

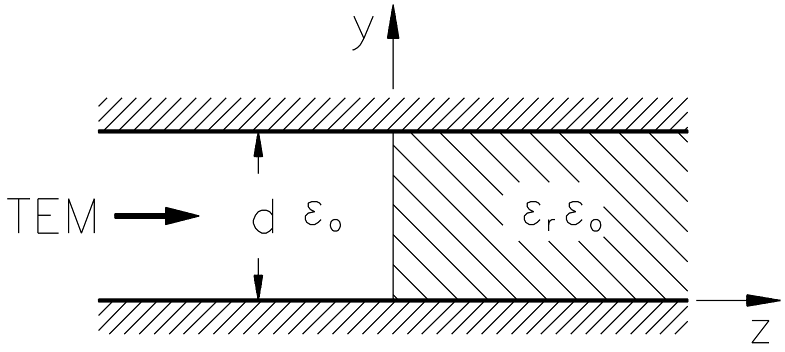
$$\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\pi a\, H(a) = I_0 \;\rightarrow\; A = -\frac{I_0}{2\pi a\,\kappa}\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\frac{1}{J_1(u_a)}\;,\; u_a = \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\, a$$

Das elektrische Feld im Leiter ist dann

$$E = -\frac{I_0}{2\pi a\,\kappa}\sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\,\frac{J_0(u)}{J_1(u_a)} \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{rcl} u &=& \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\,\varrho \\ u_a &=& \sqrt{-\mathrm{j}\omega\mu\kappa}\, a \end{array} \quad .$$

## Aufgabe B4

Eine Parallelplattenleitung ist für $z < 0$ mit Dielektrikum gefüllt. Von links her falle eine TEM-Welle ein. Für welches $\varepsilon$ wird die Hälfte der Leistung der einfallenden Welle ins Dielektrikum transmittiert?




Die Feldstärkekomponenten lauten:

$$E_y(z<0) = E_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z} + R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_0 z}) \quad ; \quad H_x(z<0) = -\frac{E_0}{Z_0}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_0 z} - R\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_0 z})$$

$$E_y(z>0) = TE_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z} \quad ; \quad H_x(z>0) = -T\frac{E_0}{Z}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta z}$$

mit

$$\beta_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad , \quad \beta = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0} \quad , \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}$$

In $z = 0$ müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen und der magnetischen Feldstärke stetig sein, d.h.:

$$E_0(1+R) = E_0 T \quad \rightarrow \quad R = T-1$$

$$\frac{E_0}{Z_0}(1-R) = \frac{E_0}{Z}T \quad \rightarrow \quad T = \frac{Z}{Z_0}\left[1-(T-1)\right] = \frac{Z}{Z_0}(2-T)$$

$$T\left(1+\frac{Z}{Z_0}\right) = 2\frac{Z}{Z_0} \quad \rightarrow \quad T = \frac{2}{\frac{Z_0}{Z}+1} = \frac{2}{k+1} \quad , \quad k = \frac{Z_0}{Z} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}}$$

Mit $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ sind die Leistungen:

$$einfallende \sim \frac{E_0^2}{Z_0} \quad , \quad transmittierte \sim T^2\frac{E_0^2}{Z}$$

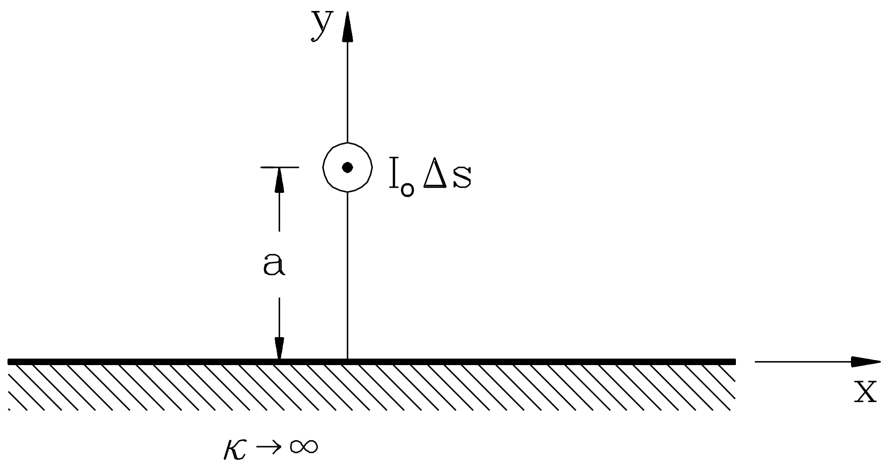
Die transmittierte Leistung soll halb so groß sein wie die einfallende:

$$\frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z_0} = T^2\frac{E_0^2}{Z} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{Z_0}{Z}\frac{4}{k^2+2k+1} \quad \rightarrow \quad k^2-6k+1 = 0$$

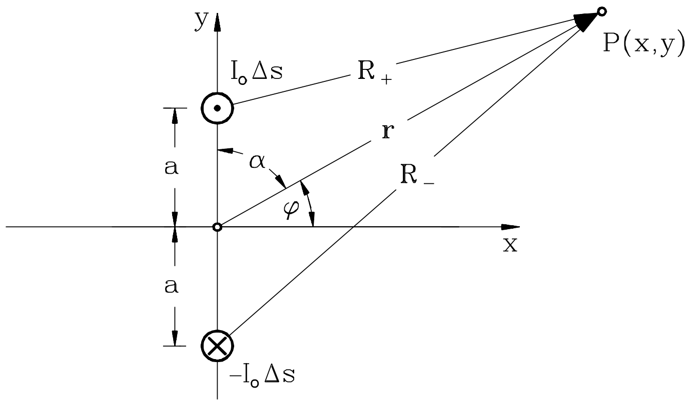
$$k = 3+\sqrt{9-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad \rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = 33.97$$

## Aufgabe B5

Gegeben ist ein $z$–gerichteter Hertzscher Dipol $I_0 \Delta s \cos\omega t$, der sich in der Ebene $z = 0$ im Abstand $a$ vor der perfekt leitend ausgeführten Ebene $x = 0$ befindet.
Berechne den zeitlichen Mittelwert der Energieflußdichte im Fernfeld in der Ebene $z = 0$!




Der Einfluß des leitenden Halbraumes wird durch Spiegelung erfaßt:




Im Fernfeld gilt dabei:

$$R_+ \approx r - a\cos\alpha$$
$$R_- \approx r + a\cos\alpha$$
$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

- **Fernfeld**

Bei Vernachlässigung des unterschiedlichen Dipolortes in der Amplitude (aber nicht in der Phase!) lautet das magnetische Fernfeld der Anordnung

$$\begin{aligned} H_\varphi &\approx \mathrm{j}\,\frac{I_0 k \Delta s}{4\pi r}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kR_+} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kR_-}\right) \\ &\approx \mathrm{j}\,\frac{I_0 k \Delta s}{4\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kr}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,ka\cos\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,ka\cos\alpha}\right)}_{2\mathrm{j}\,\sin(ka\sin\varphi)} = -\,\frac{I_0 k \Delta s}{2\pi r}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,kr}\,\sin(ka\sin\varphi) \end{aligned}$$

- **Energieflußdichte**

$$\mathbf{S}_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right) \quad , \quad \mathbf{E} = Z_0\left(\mathbf{H}\times\mathbf{e}_r\right)$$

$$\rightarrow \quad \boxed{S_{k,r} = \frac{1}{2}Z_0|H_\varphi|^2 = \frac{1}{2}Z_0\left(\frac{I_0 k \Delta s}{2\pi r}\right)^2 \sin^2(ka\sin\varphi)} \quad \text{mit} \quad k = \frac{\omega}{c} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$