Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik

Semester: SS 2004 Tag der Prüfung: 18.05.2004

1. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (3)	**A3** (2)	**A4** (3)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

HINWEISE

(bitte vor Beginn sorgfältig lesen!)

a) Prüfen Sie, ob Ihr Klausurexemplar vollständig ist. Es muß aus insgesamt 6 Blättern bestehen (1 Deckblatt, 2 Blätter mit den Aufgaben A1 bis A6, jeweils 1 Blatt für die Aufgaben B1 bis B3). **Falls Sie ein unvollständiges Klausurexemplar erhalten haben, lassen Sie sich bitte ein einwandfreies Exemplar aushändigen.**

b) Tragen Sie auf dem Deckblatt Ihren Vornamen, Namen und die Matrikelnummer ein.

c) Sie haben 90 Minuten Zeit für die Bearbeitung der Aufgaben. Es sind maximal 33 Punkte erreichbar.

d) Verwenden Sie zur Lösung der Aufgaben nur den unter den Fragen freigelassenen Raum (bei den Fragen B1 bis B3 auch die Rückseite). **Es werden beim Einsammeln keine Extrablätter angenommen!**

e) Achten Sie darauf, daß der Lösungsweg für den Korrektor nachvollziehbar ist.

f) Es sind **keinerlei Hilfsmittel** außer einem Schreibstift gestattet. Verwenden Sie aber bitte **keinen Bleistift**.

g) Die Teilnahme an dieser Klausur setzt eine **Anmeldung beim Prüfungsamt** voraus. Sollte diese nicht vorliegen, so kann die Klausur nicht benotet werden.

Bitte bestätigen Sie durch Ihre Unterschrift, daß Sie die Hinweise gelesen und verstanden haben.

Datum: ....

Unterschrift: ....

Aufgabe A1

Auf der Oberfläche eines kugelförmigen Volumens vom Radius a sei das konstante Potential $\phi = 100\,\mathrm{kV}$ vorgegeben. Innerhalb des Volumens gelte die LAPLACEgleichung.
Welches Potential und welche elektrische Feldstärke herrscht dann auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius $a/3$?

Innerhalb der *gesamten* Kugel herrscht das konstante Potential $\phi = 100\,\mathrm{kV}$, denn es erfüllt die LAPLACEgleichung sowie die Randbedingung und ist nach dem Eindeutigkeitssatz die einzige Lösung. Die Feldstärke verschwindet folglich im gesamten Kugelvolumen.

Aufgabe A2

Wie lautet der allgemeine Lösungsansatz für die LAPLACEgleichung in Polarkoordinaten? Gib eine elektrostatische Anordnung an, bei der nur der rotationssymmetrische Anteil des Lösungsansatzes auftritt.

Der allgemeine Lösungsansatz lautet:

$$\begin{aligned}\phi(\varrho,\varphi) &= (A_0 + B_0 \ln \frac{\varrho}{c}) \cdot (C_0 + D_0\varphi) + \\ &+ \sum_{p\neq 0} \Big(A_p\,\varrho^p + B_p\,\varrho^{-p}\Big) \cdot (C_p \cos p\varphi + D_p \sin p\varphi)\end{aligned}$$

Der rotationssymmetrische Anteil $(A_0 + B_0 \ln \frac{\varrho}{c})$ tritt z.B. beim Potential zwischen den Elektroden eines Koaxialkabels auf.

Aufgabe A3

Welche der folgenden Lösungen erfüllen die LAPLACEgleichung in Zylinderkoordinaten?

a) $\exp(+pz) \cdot \mathrm{J}_0(p\varrho)$

b) $\exp(-pz) \cdot \mathrm{I}_0(p\varrho)$

c) $\sin(pz) \cdot \mathrm{J}_0(p\varrho)$

d) $\sinh(pz) \cdot \mathrm{I}_0(p\varrho)$

J_0 ist die BESSELfunktion, I_0 die modifizierte BESSELfunktion und p sei ein konstanter Parameter.

Nur die Funktion $\exp(+pz) \cdot \mathrm{J}_0(p\varrho)$ erfüllt die LAPALACEgleichung.

Aufgabe A4

In der Ebene $z = 0$ fließe der Flächenstrom $\mathbf{J}_F = J_{F0}(y)\,\mathbf{e}_x$. Welche Richtung hat dann das magnetische Vektorpotential und welche Bedingungen muß es in der Ebene $z = 0$ erfüllen?

Das Vektorpotential hat die Richtung der Flächenstromdichte. Aus den Steigkeitsbedingungen für das Magnetfeld folgen die gesuchten Bedingungen für das Vektorpotential:

$$B_z(z=-0) = B_z(z=+0) \quad \rightarrow \quad A_x(z=-0) = A_x(z=+0)$$

$$H_y(z=-0) - H_y(z=+0) = J_{F0}(y) \quad \rightarrow \quad \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_{z=-0} - \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_{z=+0} = \mu_0 J_{F0}(y)$$

Aufgabe A5

Wie muß man in der Funktion

$$f(x) = \sinh(p[x-a])$$

den Parameter $p \neq 0$ wählen, damit $f(0) = 0$ ist?

Der hyperbolische Sinus hat für reelle Argumente nur eine Nullstelle. Bei imaginären Argumenten wird er zum trigonometrischen Sinus, und es muß daher gelten:

$$pa = \mathrm{j}n\pi \quad \rightarrow \quad p = \mathrm{j}\,\frac{n\pi}{a} \quad , \quad \mathrm{j} = \sqrt{-1} \quad , \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Aufgabe A6

Separieren Sie die LAPLACEgleichung in kartesischen Koordinaten für eine skalare Ortsfunktion, die unabhängig von der Koordinate x sein soll und in positive z–Richtung abklingt!

$$\phi(y,z) = Y(y) \cdot Z(z)$$

$$\nabla^2\phi(y,z) = \nabla^2\left[Y(y) \cdot Z(z)\right] = Z(z)\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} + Y(y)\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

$$\underbrace{\frac{1}{Y}\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2}}_{=-k^2} + \underbrace{\frac{1}{Z}\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}}_{=+k^2} = 0$$

$$\frac{1}{Y}\,\frac{\mathrm{d}^2Y}{\mathrm{d}y^2} = -k^2 \quad \rightarrow \quad Y(y) = A\,\sin ky + B\,\cos ky$$

$$\frac{1}{Z}\,\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 \quad \rightarrow \quad Z(z) = \mathrm{e}^{-kz}$$

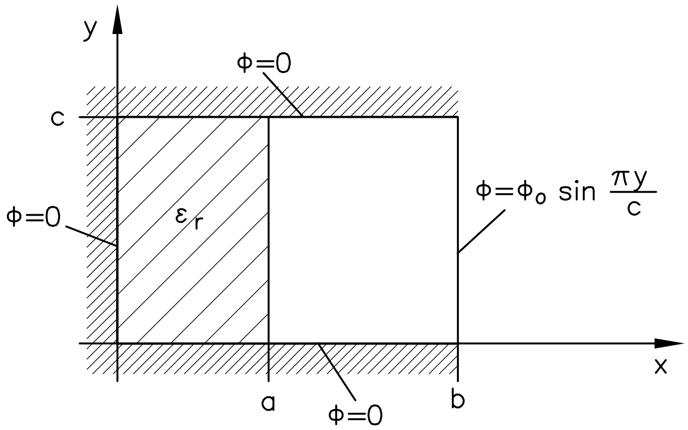
$$\boxed{\phi(y,z) = \sum_{k\neq 0}\left(A\,\sin ky + B\,\cos ky\right) \cdot \mathrm{e}^{-kz}}$$

Aufgabe B1

Im kartesischen Koordinatensystem (x, y, z) sind die Ebenen $x = 0$, $y = 0$ und $y = c$ als leitende geerdete Beläge ausgeführt, während in der Ebene $x = b$ das Potential den Verlauf

$$\phi(x = b, y) = \phi_0 \sin \frac{\pi y}{c}$$

aufweist. Der Bereich $0 < x < a$ sei außerdem mit Dielektrikum, $\varepsilon_r \neq 1$ gefüllt



Zu bestimmen ist das elektrostatische Potential im Innenraum des Rechteckzylinders.

Reduzierte Lösungsansätze für die Räume 1 $(x < a)$ und 2 $(x > a)$:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= A \sinh \frac{\pi x}{c} \sin \frac{\pi y}{c} \\
\phi_2 &= \left(B \sinh \frac{\pi(x-a)}{c} + C \cosh \frac{\pi(x-a)}{c} \right) \sin \frac{\pi y}{c}
\end{aligned}$$

Die Ansätze verschwinden auf den geerdeten Wänden und es wurde aufgrund der speziellen Potentialvorgabe nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme verwendet.

Stetigkeitsbedingungen für $x = a$:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \quad A \sinh \frac{\pi a}{c} = C$$

$$\varepsilon_r \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_r A \cosh \frac{\pi a}{c} = B$$

$$\rightarrow \quad C = B \frac{1}{\varepsilon_r} \tanh \frac{\pi a}{c}$$

Randbedingung auf der Fläche $x = b$:

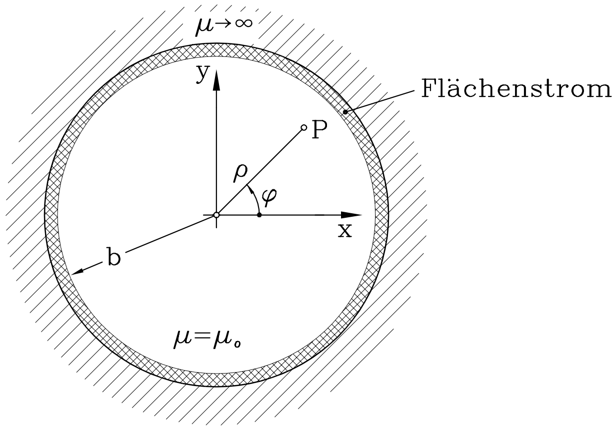
$$B \left(\sinh \frac{\pi(b-a)}{c} + \frac{1}{\varepsilon_r} \tanh \frac{\pi a}{c} \cosh \frac{\pi(b-a)}{c} \right) = \phi_0$$

Damit liegt die Konstante B vor und die Konstanten A und C können aus den obigen Formel ermittelt werden, d.h. das Problem ist gelöst.

Aufgabe B2

In den Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) ist der Bereich $\varrho > b$ mit hochpermeabler Materie $\mu \to \infty$ gefüllt. Auf der Zylinderfläche $\varrho = b$ fließe der Flächenstrom

$$\mathbf{J}_F = J_{F0} \sin\varphi \, \mathbf{e}_z \quad .$$

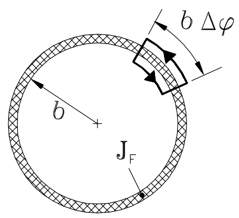


Bestimme die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ im Bereich $\varrho \le b$.

Da ein ebenes Problem mit allein z–gerichteten Strömen vorliegt, weist das Vektorpotential auch nur eine z–Komponente auf. Die Komponenten des magnetischen Feldes ergeben sich mit $\mathbf{A} = A(\varrho, \varphi)\, \mathbf{e}_z$ zu

$$\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \to \quad \mu_0 H_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial \varphi} \quad , \quad \mu_0 H_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial \varrho} \quad .$$

Erfassung des erregenden Strombelages:



$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = (0 - H_\varphi|_{\varrho=b}) b\Delta\varphi = J_{F0} b \Delta\varphi \sin\varphi$$

$$\to \quad \left.\frac{\partial A}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=b} = \mu_0 J_{F0} \sin\varphi$$

Reduzierter Potentialansatz:

$$A(\varrho, \varphi) = C\, \varrho \sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial \varrho} = C \sin\varphi$$

Aufgrund der Randbedingung auf dem Zylinder $\varrho = b$ folgt

$$C = \mu_0 J_{F0} \quad \to \quad A(\varrho, \varphi) = \mu_0 J_{F0}\, \varrho \sin\varphi = \mu_0 J_{F0}\, y \quad \to \quad \boxed{\mathbf{B} = \mu_0 J_{F0}\, \mathbf{e}_x} \quad .$$

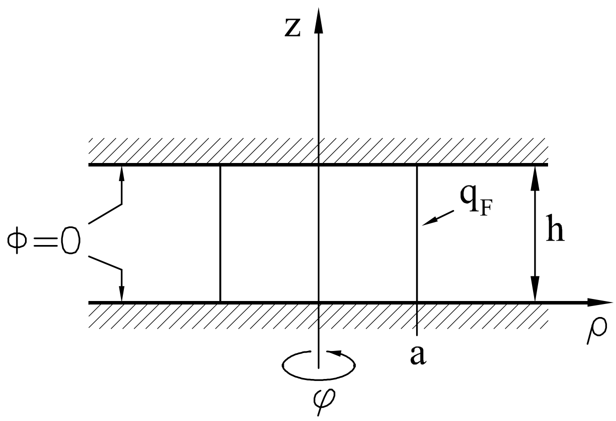
Es stellt sich also ein homogenes Feld ein.

Aufgabe B3

In den Zylinderkoordinaten (ϱ, φ, z) sind die Ebenen $z = 0$ und $z = h$ als geerdete leitende Beläge ausgeführt, während auf der Fläche $\varrho = a$ zwischen den Platten eine Flächenladung der konstanten Dichte

$$q_F = q_{F0}$$

angeordnet ist.



Bestimme das Potential zwischen den geerdeten Platten!

Potentialansätze:

$$\varrho \leq a: \quad \phi_1 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n\, I_0\left(\frac{n\pi\varrho}{h}\right) \sin\frac{n\pi z}{h} \quad , \quad \varrho \geq a: \quad \phi_2 = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} B_n\, K_0\left(\frac{n\pi\varrho}{h}\right) \sin\frac{n\pi z}{h}$$

Stetigkeitsbedingungen für $\varrho = a$:

$$\phi_1 = \phi_2 \quad \rightarrow \quad A_n\, I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right) = B_n\, K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)$$

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\varrho} - \frac{\partial\phi_2}{\partial\varrho} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \underbrace{\frac{n\pi}{h}\left[A_n\, I_1\left(\frac{n\pi a}{h}\right) + B_n\, K_1\left(\frac{n\pi a}{h}\right)\right]}_{C_n} \sin\frac{n\pi z}{h} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

Orthogonalentwicklung:

$$\frac{h}{2}\, C_n = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \int_0^h \sin\frac{n\pi z}{h}\, \mathrm{d}z \quad \rightarrow \quad C_n = \frac{4}{n\pi}\,\frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

Die übrigen Konstanten sind dann schließlich

$$B_n = \frac{h}{n\pi}\, C_n\, \frac{I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)}{K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)\, I_1\left(\frac{n\pi a}{h}\right) + I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)\, K_1\left(\frac{n\pi a}{h}\right)} \quad , \quad A_n = B_n\, \frac{K_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{h}\right)}$$

mit $n = 1, 3, 5, \ldots$, und das Problem ist gelöst.