Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik
Semester: SS 2007	Tag der Prüfung: 15.05.2007

1. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (3)	**A2** (2)	**A3** (3)	**A4** (2)	**A5** (2)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (6)		Σ P	Note
Punkte						

Aufgabe A1

Die zweidimensionale Funktion $F(x, z)$ erfülle die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{F}{a^2}\,.$$

mit den Randbedingungen $F(x, z = 0) = F(x, z = L) = 0$ und $F(x \to \infty) = 0$.

Stelle mit Hilfe des Produktansatzes von BERNOULLI einen allgemeinen Lösungsansatz auf, der die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt.

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{F}{a^2} = 0\,,\quad F = X(x)\cdot Z(z)\,,\quad \underbrace{\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{=p^2+\frac{1}{a^2}} + \underbrace{\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}}_{=p^2} - \frac{1}{a^2} = 0$$

$$p = \frac{n\pi}{L} \qquad Z(z) = \begin{cases} \sin px \\ \cos px \end{cases}$$

$$X(x) = \begin{cases} e^{\pm(p^2+\frac{1}{a^2})^{1/2} x} \end{cases}$$

$$F(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{n\pi z}{L}\, e^{-x\sqrt{(\frac{n\pi}{L})^2 + \frac{1}{a^2}}}$$

Aufgabe A2

Für eine Funktion $f(x)$ gelte im Intervall $a \le x \le b$ die Entwicklung

$$f(x) = \sum_n a_n X_n(x)$$

nach orthonormalen Eigenfunktionen $X_n(x)$. Welchen Wert nimmt dann das Integral

$$\int_a^b w(x)\, f^2(x)\, \mathrm{d}x$$

an, wenn $w(x)$ die Gewichtsfunktion ist?

$$\int_{a_0}^{a_1} X_m(x)\cdot X_n(x)\, w(x)\, dx = \delta(m-n) \quad \text{orthonormal}$$

$$\int_a^b w(x)\cdot f^2(x)\cdot dx = \sum_{\substack{n\neq 0\\ m\neq 0}} a_n \cdot a_m \underbrace{\int_a^b w(x)\, X_m(x)\, X_n(x)\cdot dx}_{\delta(m-n)} = \begin{cases} \sum_n (a_n)^2 & \text{für } n = m \\ 0 & \text{für } n \neq m \end{cases}$$

$$= \sum_n (a_n)^2$$

Aufgabe A3

a) Was versteht man unter orthogonalen Funktionen?

b) Welche Funktionen sind in kartesischen Koordinaten im Bereich $2 \leq x \leq 5$ orthogonal?

c) Welche Funktionen sind in Kugelkoordinaten im Bereich $0 \leq \vartheta \leq \pi$ orthogonal?

a) orthogonale Funktionen erfüllen die Relation:

$$\int_a^b w(x)\cdot f_n(x)\cdot f_m(x)\cdot dx = 0 \text{ für } m \neq n$$

b) $\int_2^5 w(x)\, f_n(x)\, f_m(x)\, dx = \int_2^{3+2} \sin \frac{n\pi}{c}(x-2)\cdot \sin \frac{m\pi}{c}(x-2)\, dx = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$, (=)

$\boxed{\sin \frac{n\pi(x-2)}{3}}$

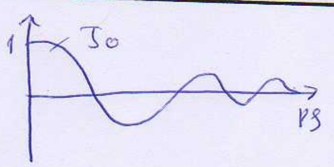
c) $\boxed{P_n(\cos \vartheta)}$

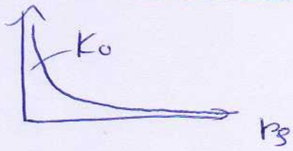
$\int P_n(u)\cdot P_m(u)\cdot du$, $u = \cos\vartheta$, $\int_1^{-1} P_n(u)\cdot P_m(u)\cdot du = -\int_{-1}^{1} P_n(u)\cdot P_m(u)\cdot du = -\frac{2}{2n+1}\delta_m^n$

Aufgabe A4

Skizziere die prinzipiellen Verläufe der BESSELfunktion $J_0(x)$ und der modifizierten BESSELfunktion $K_0(x)$!
Mit welchen der beiden Funktionen ist in Zylinderkoordinaten eine Orthogonalentwicklung möglich?

J_0





Jo ist in Zylinderkoordinaten möglich.

A3) a)

$$\int_a^b w(x) \cdot f_n(x) \cdot f_m(x) \cdot dx = \begin{cases} A \cdot \cancel{\delta_m^n} & | \; m = n \\ 0 & | \; m \neq n \end{cases}$$

b)

$$\int_2^5 w(x)\, f_n(x)\, f_m(x) \cdot dx = \int_2^{3+2} \sin\left(\frac{n\pi}{c}(x-2)\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{c}(x-2)\right) dx = \frac{a}{2} = \frac{3}{2}$$

c)

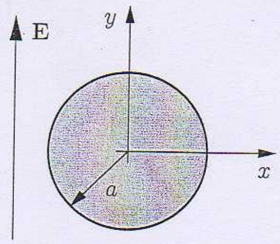
$$\int P_n(u) \cdot P_m(u) \cdot du \quad , \quad u = \cos \theta$$

$$\int_1^{-1} P_n(u) \cdot P_m(u) \cdot du = -\int_{-1}^{1} P_n(u)\, P_m(u)\, du \qquad \begin{cases} 1 = \cos 0 \\ -1 = \cos \pi \end{cases}$$

$$= -\frac{2}{2n+1} \cdot \delta_m^n$$

Aufgabe A5

In ein y-gerichtetes, homogenes elektrostatisches Feld wird ein leitender Zylinder mit dem Radius a eingebracht.



a) $\phi(\varrho, \varphi) = B\,\frac{1}{\varrho}\,\sin\varphi$

b) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi$

c) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho}\right)\cos\varphi$

d) $\phi(\varrho, \varphi) = \left(A\,\varrho + B\,\frac{1}{\varrho^2}\right)\sin\varphi$

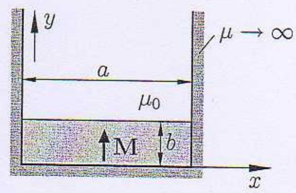
Welche der angegebenen Potentialansätze sind im Außenraum $\varrho > a$ richtig?

Nur der Ansatz b) ist richtig, weil das Potential eine ungerade Funktion von φ sein muß und beide Funktionen ϱ bzw. $1/\varrho$ erforderlich sind.

Aufgabe A6

Die Ebenen $x = 0$, $x = a$ sowie $y = 0$ bilden die Wände einer Nut im ansonsten hochpermeablen Gesamtraum ($\mu \to \infty$). Der Bereich $0 < x < a$, $0 < y < b$ sei in y-Richtung magnetisiert, $\mathbf{M} = \mathbf{e}_y M_0 \sin\frac{\pi x}{a}$.

Notiere alle Rand- und Stetigkeitsbedingungen, die das magnetische Feld $\mathbf{H}$ erfüllen muß.



$$H_y(x=0) = H_y(x=a) = H_x(y=0) = 0$$

$$H_{x,y}(x, y \to \infty) \to 0$$

$$H_y(x, y=b-0) + M_0 \sin\frac{\pi x}{a} = H_y(x, y=b+0)$$

A6.) $\vec{M} = \vec{e}_y \cdot M_0 \cdot \sin\frac{\pi x}{a}$

bei $y = b$:

(1) $H_{x1} = H_{x2} \rightarrow \frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2}{\partial x}$

(2) $B_{n1} = B_{n2} \rightarrow H_{y1} + M = H_{y2} \rightarrow -\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + M = -\frac{\partial \phi_2}{\partial y}$

$\phi_1\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = \phi_2\Big|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0 \quad , \quad \phi_1(y=0) = 0 \quad , \quad \phi_2(y\rightarrow\infty) = 0$

$\phi_1 = A \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \cdot \sinh\frac{\pi y}{a} \qquad \phi_2 = B \cdot \sin\frac{\pi x}{a} \cdot e^{-\frac{\pi}{a}(y-b)}$

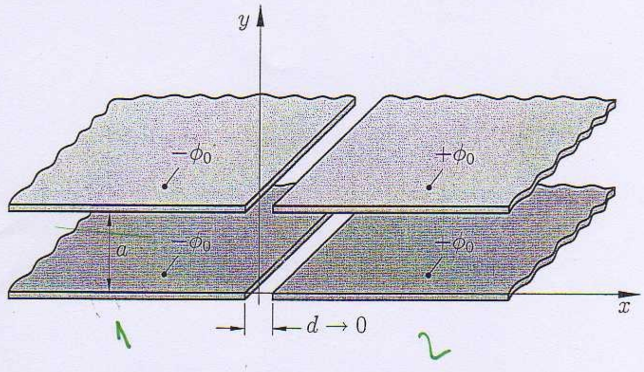
(1) $A \cdot \sinh\frac{\pi b}{a} = B$

(2) $-A \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \cosh\frac{\pi b}{a} + M_0 = B \cdot \frac{\pi}{a}$

$A = \frac{M_0 \cdot a}{\pi} \cdot \frac{1}{\left(\sinh\frac{\pi b}{a} + \cosh\frac{\pi b}{a}\right)}$

Aufgabe B1

Gegeben seien 4 in z-Richtung und in positive bzw. negative x-Richtung unendlich ausgedehnte, leitende Platten mit den Potentialen $\pm\phi_0$, siehe Bild. Die beiden oberen bzw. unteren Platten weisen einen zu vernachlässigenden Isolationsabstand auf.



Bestimme das elektrostatische Potential $\phi(x, y)$ der Anordnung im Bereich $0 \le y \le a$.

Ansatz: $\phi(x,y) = \text{sign}(x) \left(\phi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} \cdot e^{-n\pi|x|/a}\right)$

Randbedingungen:

$\phi(0,y) = 0 \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi y}{a} = -\phi_0 \rightarrow \frac{a}{2} A_n = -\phi_0 \int_0^a \sin\frac{n\pi y}{a}\, dy = -\frac{2a\phi_0}{n\pi}$

$\rightarrow \phi(x,y) = \text{sign}(x) \cdot \phi_0 \cdot \left(1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} \cdot e^{-n\pi|x|/a}\right)$

Andere Lösung: Allg: $\phi(x,y) = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{p \neq 0} (A_p \cdot \cos py + B_p \cdot \sin py)$ $(\underbrace{C_p \cdot e^{px}}_{\text{für } 1} + \underbrace{D_p \cdot e^{-px}}_{\text{für } 2})$

$x = 0 \Rightarrow \phi = 0 \rightarrow B_0 = 0, \; y = 0 \Rightarrow \phi \neq 0 \rightarrow D_0 = 0$

$\phi_1 = -\phi_0 + \sum_p (\cancel{A_p \cdot \cos py} + B_p \cdot \sin py) \cdot e^{px}$

$\phi_2 = +\phi_0 + \sum_p (\cancel{A_p \cdot \cos py} + B_p \cdot \sin py)\, e^{-px}$

$y = 0 \Rightarrow A_p = 0$

$y = a \Rightarrow p = \frac{n\pi}{a}$

R.B: $x = 0$

(1) $\phi_1 = \phi_2$ und (2) $D_{n2} = D_{n1}$

(1) $-\phi_0 + A_n \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} = +\phi_0 + B_n \cdot \sin\frac{n\pi y}{a}$

(2) $A_n = -B_n$ (2) in (1) $\Rightarrow -\phi_0 + A_n \cdot \sin\frac{n\pi y}{a} = \phi_0 - A_n \cdot \sin\frac{n\pi y}{a}$

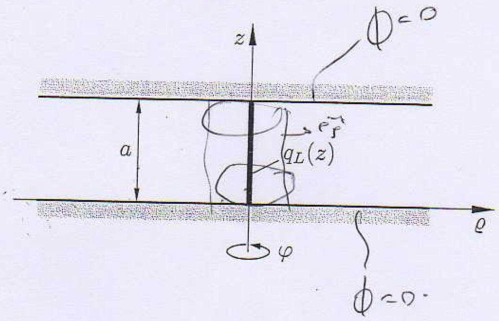
$A_n = \frac{\phi_0}{\sin\frac{n\pi y}{a}}$

Aufgabe B2

Die Ebenen $z = 0$ und $z = a$ seien perfekt leitende Platten. Zwischen den Platten befinde sich auf der z-Achse eine sinusförmige Linienladung

$$q_L(z) = Q\,\frac{\pi}{2a}\,\sin\frac{\pi z}{a}\,. \qquad n = 1$$

Berechne das Potential im Bereich $0 \le z \le a$.



$\infty \to \Phi = 0$

Hinweis:

$$\frac{\mathrm{d}K_0(x)}{\mathrm{d}x} = -K_1(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} K_1(x) = \frac{1}{x}\,.$$

$\Phi(\varrho,z) = (A_0 + B_0 \ln \frac{\varrho}{\varrho_0})(C_0 + D_0 \cdot z) + \sum_{p\neq 0} (A_p \cdot I_0(p\varrho) + B_p \cdot K_0(p\varrho)) \cdot (C_p \cdot \cos(pz) + D_p \cdot \sin(pz))$

$\varrho \to \infty \quad \Phi \neq \infty \quad A_p = 0 \quad B_0 = 0 \quad z = 0 \Rightarrow A_0 = 0 \;\; z = 0, \; z = a \Rightarrow C_0 = D_0 = 0$

$C_p = 0$

$\Phi(\varrho, z) = A \cdot K_0(\frac{\pi \varrho}{a}) \cdot \sin\frac{\pi z}{a} \; ; \; D_\varrho = -\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varrho} = \varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{\pi}{a} \cdot K_1(\frac{\pi \varrho}{a}) \cdot \sin\frac{\pi z}{a}$

$\oint \vec{D} \cdot d\vec{O} = Q \frac{\pi}{2a} \int_0^a \sin\frac{\pi z}{a} \cdot dz = Q = \iint D_\varrho \, dO \quad \lim \varrho \to 0$

$\iiint D_\varrho \cdot dO = Q \qquad dO = \varrho \cdot d\varphi\, dz$

$\int_0^a \int_0^{2\pi} \varepsilon_0 A \cdot \frac{\pi}{a} K_1(\frac{\pi \varrho}{a}) \cdot \sin\frac{\pi z}{a} \cdot \varrho \cdot d\varphi \cdot dz = Q$

$\varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{\pi}{a} \left(\lim_{\frac{\pi \varrho}{a} \to 0} K_1(\frac{\pi \varrho}{a})\right) \cdot 2\pi \cdot \varrho \cdot \frac{2 \cdot a}{\pi} = Q$

$\varepsilon_0 \cdot A \cdot \cancel{\frac{\pi}{a}} \cdot \cancel{\frac{a}{\pi \varrho}} \cdot 2\cancel{\pi}\cancel{\varrho} \cdot \frac{2a}{\cancel{\pi}} = Q \Leftrightarrow A = \frac{Q}{4 \varepsilon_0 \cdot a}$

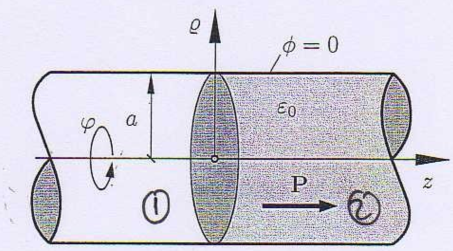
$\Phi(\varrho, z) = \frac{Q}{4 \varepsilon_0 a} \cdot K_0(\frac{\pi \varrho}{a}) \cdot \sin\frac{\pi z}{a}$

Aufgabe B3

Ein unendlich langes, leitendes, geerdetes Rohr enthält im Bereich $z > 0$ ein vorpolarisiertes Material mit der ortsabhängigen Polarisation

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_z P_0 J_0\left(j_{02}\frac{\varrho}{a}\right) .$$

J_0 ist die BESSELfunktion und j_{02} ihre zweite Nullstelle.



$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$

Berechne das Potential innerhalb des Rohres sowie die elektrische Flußdichte **D** auf der Achse $\varrho = 0$.

Allg: $\Phi(\varrho, z) = (A_0 + B_0 \cdot \ln\frac{\varrho}{a}) \cdot (C_0 + D_0 z) + \sum_{p \neq 0} (A_p \cdot J_0(p\varrho) + B_p \cdot K_0(p\varrho)) \cdot e^{\pm pz}$

R.B.: $\varrho = 0 \Rightarrow B_0 = 0,\ B_p = 0$ und $\varrho = a \Rightarrow A_0 = 0$

$z = 0 \rightarrow C_0 = 0,\quad z \to \infty \Rightarrow D_0 = 0$

$\Phi_1 = A \cdot J_0(j_{02} \cdot \frac{\varrho}{a}) \cdot e^{j_{02} \cdot \frac{z}{a}} \qquad \Phi_2 = B \cdot J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a}) \cdot e^{-j_{02}\frac{z}{a}}$

bei $z = 0$: (1) $\Phi_1 = \Phi_2$ und (2) $D_{n2} = D_{n1}$

(1) $A = B$; $\quad -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + P$ (2)

$-\varepsilon_0 \cdot A \cdot \frac{j_{02}}{a} \cdot \cancel{J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a})} = \varepsilon_0 \cdot \frac{j_{02}}{a} \cdot A \cdot \cancel{J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a})} + P_0 \cdot \cancel{J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a})}$

$A = B = -\frac{P_0 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot j_{02}}$; $\Phi_1 = -\frac{P_0 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot j_{02}} \cdot J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a}) \cdot e^{j_{02} \cdot \frac{z}{a}}$; $\Phi_2 = -\frac{P_0 a}{2 \cdot \varepsilon_0 j_{02}} J_0(j_{02}\frac{\varrho}{a}) \cdot e^{-j_{02}\frac{z}{a}}$

$\varrho = 0$: $\qquad J_0(0) = 1$

$D_{z1} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = -\varepsilon_0 \left(-\frac{P_0 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 j_{02}}\right) \frac{j_{02}}{a} \cdot e^{j_{02} \cdot \frac{z}{a}} = \frac{P_0}{2} \cdot e^{j_{02} \cdot \frac{z}{a}}$

$D_{z2} = -\varepsilon_0 \cdot \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + P = -\varepsilon_0 \left(-\frac{P_0 \cdot a}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot j_{02}}\right) \cdot \left(-\frac{j_{02}}{a}\right) \cdot e^{-j_{02} \cdot \frac{z}{a}} + P_0$

$\cancel{D_{z2} = P_0 (1}$ $\quad D_{z2} = P_0 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot e^{-j_{02} \cdot \frac{z}{a}}\right)$