Technische Universität Berlin Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik	**Prüfungen** in Theoretischer Elektrotechnik
Semester: SS 2007	Tag der Prüfung: 12.06.2007

2. Teilprüfung

im Fach

TET II

Name: ....

Vorname: ....

Matr.-Nr.: ....

Studiengang: ....

⇑ *bitte in Druckbuchstaben ausfüllen* ⇑

Bitte beachten Sie auch die Hinweise auf der Rückseite!

Aufgabe	**A1** (2)	**A2** (2)	**A3** (3)	**A4** (3)	**A5** (3)	**A6** (3)
Punkte						
Aufgabe	**B1** (6)	**B2** (6)	**B3** (5)		Σ P	Note
Punkte						

Aufgabe A1

Gegeben ist ein Volumen mit einer ortsabhängigen Magnetisierung $\mathbf{M}(x, y, z)$.

a) Leite die Differentialgleichung für das magnetische Vektorpotential her.

b) Unter welchen Voraussetzungen wird diese Differentialgleichung zur LAPLACE-Gleichung?

a) $\nabla\times\vec{A} = \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$, $\nabla\times\vec{H} = \vec{J}$, $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}$

$\nabla\times\vec{B} = \frac{\vec{J}}{\mu}$

$\nabla\times\vec{B} = \mu_0(\underbrace{\nabla\times\vec{H}}_{=\vec{J}=0} + \nabla\times\vec{M})$

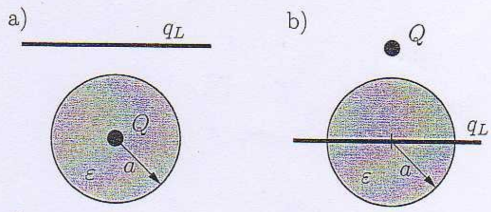
$\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \mu_0(\nabla\times\vec{M}) = \underbrace{\nabla\cdot(\nabla\cdot\vec{A})}_{=0} - \vec{A}(\nabla\cdot\nabla) = -\nabla^2\vec{A}$

$-\nabla^2\vec{A} = \mu_0(\nabla\times\vec{M})$

b) $\nabla\times\vec{M} = 0 \Longrightarrow \nabla^2\vec{A} = 0$ Laplace

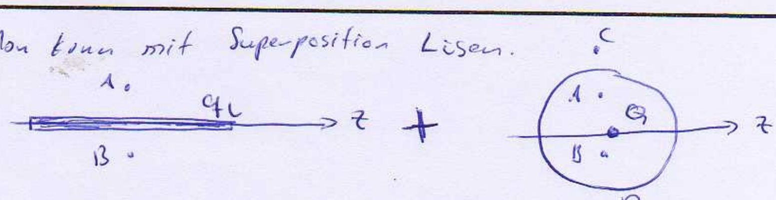
Aufgabe A2

Gegeben ist eine dielektrische Kugel. Im Fall a) befinde sich im Mittelpunkt der Kugel eine Punktladung Q und vor der Kugel eine Linienladung q_L. Im Fall b) sind die Orte der beiden Ladungen vertauscht.

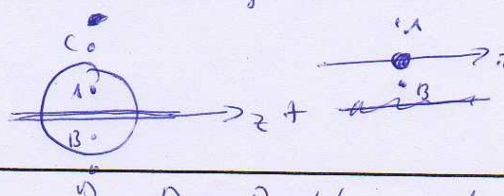


Lassen sich die beiden Anordnungen durch Überlagerung rotationssymmetrischer Ansätze $\phi(r, \vartheta)$ in Kugelkoordinaten lösen? Wie würde man gegebenenfalls dabei vorgehen?

a) Man kann mit Superposition lösen.



b) Diese Anordnungen wirk auch mit Superposition lösen können.



Die Punkten sind A und B, C und D Symmetrisch.

Aufgabe A3

In der Ebene $z = 0$ fließe der Flächenstrom $\mathbf{J}_F = J_{F0}(y)\,\mathbf{e}_x$. Welche Richtung hat dann das magnetische Vektorpotential und welche Bedingungen muß es in der Ebene $z = 0$ erfüllen?

$\vec{A} = A \cdot \vec{e_x}$

$B_z(z=-0) = B_z(z=+0) \longrightarrow A_x(z=-0) = A_x(z=+0)$

$H_y(z=-0) - H_y(z=+0) = J_{F0}(y) \rightarrow \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_{z=-0} - \left.\frac{\partial A_x}{\partial z}\right|_{z=+0} = \mu_0 \cdot J_{F0}(y)$

Aufgabe A4

Welche der folgenden vom Ort x und der Zeit t abhängigen Funktionen mit den reellen Parametern α und $\beta > 0$ erfüllen die Diffusionsgleichung?

$$
\begin{aligned}
f_1(x,t) &= \cos\alpha x\, e^{\beta t} \\
\checkmark\; f_2(x,t) &= \sin\alpha x\, e^{-\beta t} \\
\checkmark\; f_3(x,t) &= Ax + B\sin\alpha x\, e^{-\beta t} \\
f_4(x,t) &= \cos(\beta t - \alpha x)
\end{aligned}
$$

Drücke gegebenenfalls den Parameter β durch α aus.

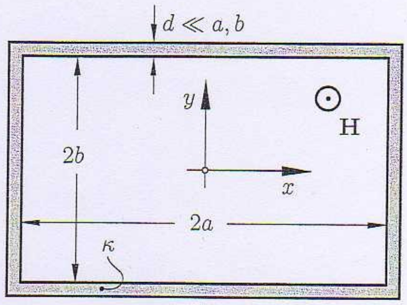
$f_1(x, t \to \infty) = \infty$ nicht erfüllt

$f_4(x,t) = \cos(\beta t - \alpha x)$ nicht erfüllt.

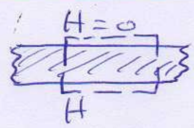
$f_2(x,t)$ und $f_3(x,t)$ erfüllen die Diffusionsgleichung

Aufgabe A5

Gegeben ist ein unendlich langer, leitender, dünnwandiger Rechteckzylinder in einem parallel verlaufenden, homogenen magnetischen Feld, siehe Bild. Das Magnetfeld wird zum Zeitpunkt $t = 0$ schlagartig abgeschaltet. Wie groß ist der in der Zylinderwand induzierte Strom pro Längeneinheit zur Zeit $t = +0$ und welche Richtung hat er?



Allg: $\oint \vec{H}\, d\vec{s} = I$



$J_F \cdot d = I$

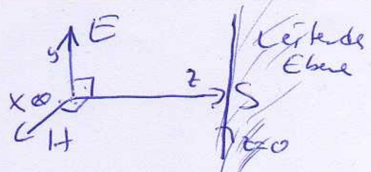
$H\, d = I$

$H = \frac{I}{d} = J_F$

$J_F = H = \frac{I}{d}$

Aufgabe A6

Eine ebene Welle mit der Amplitude E_0 fällt senkrecht auf eine leitende Ebene ein. Wie groß ist die resultierende Amplitude des magnetischen Feldes auf der Oberfläche der Ebene?



$\underset{\vec{e}_z}{\vec{S}} = \underset{\vec{e}_y}{\vec{E}} \times \underset{(-\vec{e}_x)}{\vec{H}}$

$E = E_0 \cdot (e^{-jk \cdot z} - R \cdot e^{jkz})$

$E(z=0) = 0 \Rightarrow 1 - R = 0 \Rightarrow R = 1$

$\nabla \times \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt} = -\mu_0 \frac{d\vec{H}}{dt} = -j\omega\mu_0 \underset{\text{in x-richt.}}{\vec{H}}$

$\nabla \times \bar{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial E_y}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{j\omega\mu_0} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{E_0}{j\omega\mu_0} (-jk \cdot e^{-jkz} - jk \cdot R\, e^{jkz})$

$H = \frac{-E_0 \cdot j \cdot k}{j\omega\mu_0} (e^{-jkz} + R \cdot e^{jkz}) = \frac{-E_0\, \cancel{\omega} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}{\cancel{\omega} \cdot \mu_0} (e^{-jkz} + R\, e^{jkz})$

$= -E_0 \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} (e^{-jkz} + \underset{=1}{R} \cdot e^{jkz}) = -\frac{E_0}{Z_0} (e^{-jkz} + e^{jkz})$

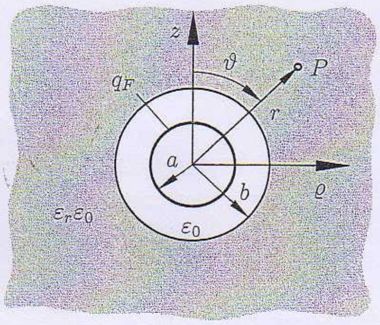
$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \qquad k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$

Aufgabe B1

Gegeben ist ein dielektrisches Medium (ε_r) mit einem kugelförmigen Hohlraum vom Radius b. Innerhalb des Hohlraumes befinde sich zusätzlich eine kugelförmige Flächenladung mit dem Radius a und der Dichte

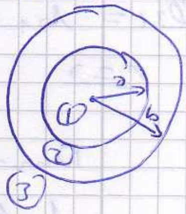
$$q_F(\vartheta) = q_{F0}\,(1 + \cos\vartheta) \ .$$

Bestimme das Potential der Anordnung.



B1: Allg: $\Phi(r,\vartheta)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cdot r^n + B_n \frac{1}{r^{n+1}}\right)\cdot P_n(\cos\vartheta)$

$q_F(\vartheta) = q_{F0} + q_{F0}\cdot\cos\vartheta$ $\quad$ n = 0 und n = 1



n=0:

$q_F(\vartheta) = q_{F0}$

$\cancel{\Phi_1 = A_1 \frac{r}{a} P_1}$ $\quad \Phi_1 = A_1$

$\Phi_2 = \left(A_2 + B_2\cdot\frac{a}{r}\right)$

$\Phi_3 = A_3 \frac{a}{r}$

r = a:

$A_1 = (A_2 + B_2)$ (1)

$D_{n2} - D_{n1} = q_{F0} \Rightarrow 0 + B_2\cdot\frac{1}{a} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$

$B_2 = \frac{q_{F0}}{a\cdot\varepsilon_0}$

r = b $\quad A_3\cdot\frac{a}{b} = A_2 + B_2\cdot\frac{a}{b}$ (2)

$D_{n3} = D_{n2} \quad -\varepsilon_r\cdot A_3\cdot\frac{\cancel{a}}{b^2} = -B_2\cdot\frac{\cancel{a}}{b^2}$

$B_2 = \varepsilon_r\cdot A_3 \quad A_3 = \frac{q_{F0}}{a\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}$

(2) $\frac{q_{F0}}{a\cdot\varepsilon_0\varepsilon_r}\cdot\frac{a}{b} = A_2 + \frac{a}{b}\cdot\frac{q_{F0}}{a\cdot\varepsilon_0}$

$A_2 = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0\cdot b}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right)$

$A_1 = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r\cdot b} + \frac{1}{a}\right) = \cancel{\frac{q_{F0}}{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot a\cdot b}\cdot(1-\varepsilon_r+\varepsilon_r\cdot b)}$

$\cancel{\Phi_1 = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot a\cdot b}(1-\varepsilon_r+\varepsilon_r\cdot b)}$

$\boxed{\Phi_{10} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r\cdot b} + \frac{1}{a}\right)}$

$\boxed{\Phi_{20} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0 b}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{\varepsilon_r}\right) + \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0\cdot r}}$

$\boxed{\Phi_{30} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0\varepsilon_r\cdot r}}$

BRUNNEN

$\underline{n=1}$

$$\phi_{11} = A_{11}\,\frac{r}{a}\cdot\cos\vartheta\ ,\quad \phi_{21} = \left(A_{21}\,\frac{r}{a} + B_2\cdot\left(\frac{a}{r}\right)^2\right)\cdot\cos\vartheta$$

$$\phi_{31} = A_{31}\left(\frac{a}{r}\right)^2\cdot\cos\vartheta$$

$\underline{r=a}$

$$A_{11} = A_{21} + B_2 \quad (1)$$

$$D_{n2} - D_{n1} = q_{F0}\cdot\cos\vartheta$$

$$\frac{1}{a}\cdot A_{11} - A_{21}\cdot\frac{1}{a} + 2B_{21}\cdot\frac{1}{a} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0} \quad (2)$$

$\underline{r=b}$:

$$A_{31}\left(\frac{a}{b}\right)^2 = A_{21}\,\frac{r}{b} + B_{21}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad (3)$$

$$D_{n3} = D_{n2}$$

$$-2\cdot\varepsilon_r\,A_{31}\,\frac{a^2}{b^3} = A_{21} - 2B_{21}\,\frac{a^2}{b^3} \quad (4)$$

(1) in (2) $\quad \frac{1}{a}A_{21} + \frac{1}{a}B_{21} - \frac{1}{a}A_{21} + 2B_2\frac{1}{a} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{B_{21} = \frac{q_{F0}\cdot a}{3\cdot\varepsilon_0}} \qquad A_{31}\frac{a^2}{b^3} = A_{21}\cdot\frac{r}{b^2} + B_{21}\cdot\frac{a^2}{b^3}$$

$$0 = -2\varepsilon_r A_{21}\frac{r}{b^2} - 2\varepsilon_r B_{21}\frac{a^2}{b^3} - A_{21} + 2B_{21}\frac{a^2}{b^3}$$

$$\cancel{A_{21}\left(1+2\varepsilon_r\frac{r}{b^2}\right)}$$

$$A_{21}\left(1+2\varepsilon_r\frac{r}{b^2}\right) = 2\,\frac{a^2}{b^3}\,B_{21}\,(1-\varepsilon_r)$$

$$\boxed{A_{21} = 2\,\frac{a^2}{b}\cdot B_{21}\,\frac{1-\varepsilon_r}{b^2+2\varepsilon_r r} = \frac{2q_{F0}\cdot a^3}{3\varepsilon_0\cdot b}\,\frac{1-\varepsilon_r}{b^2+2\varepsilon_r r}}$$

$$\boxed{A_{11} = \frac{2\,q_{F0}\cdot a^3}{3\varepsilon_0 b}\,\frac{1-\varepsilon_r}{b^2+2\varepsilon_r r} + \frac{q_{F0}\cdot a}{3\varepsilon_0}}$$

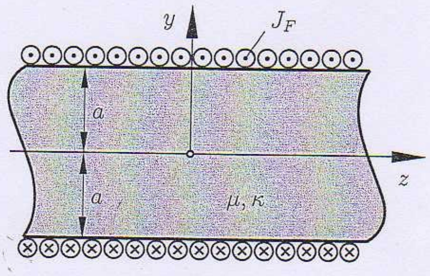
$$\phi_1 = \phi_{10} + \phi_{11}$$

$$\phi_2 = \phi_{20} + \phi_{21}$$

$$\phi_3 = \phi_{30} + \phi_{31}$$

Aufgabe B2

Der gesamte Bereich $|y| < a$ ist mit leitender Materie gefüllt. Auf den Flächen $y = \pm a$ befinden dicht beieinander liegende gleichstromdurchflossene Leiter, die als homogen verteilte Flächenströme $\pm J_F$ aufgefaßt werden dürfen. Der Strom wird zum Zeitpunkt $t = 0$ abgeschaltet. Berechne das magnetische Feld im leitenden Bereich für $t > 0$.



B2i:

$\cancel{\nabla^2 H = j\omega \kappa H}$

$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ $\quad \vec{J} = \kappa \vec{E}$

$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \varepsilon \mu \vec{H}$

$\nabla \times (\nabla \times H) = -j\omega \mu \kappa H$

$-\nabla^2 H = j\omega \mu \kappa H$

$\nabla^2 H = \kappa \mu \frac{dH}{dt}$ $\quad p = \kappa \mu$

$H = Y_{(y)} \cdot T_{(t)} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{= -k_y^2} = p \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \frac{dT}{dt}}_{= -\frac{k_y^2}{p}}$

$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2$ $\quad \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{k_y^2}{p}$ mit $p = \kappa \mu$

$Y_{(y)} = \begin{cases} \sin k_y y \\ \cos k_y y \end{cases}$ $\quad T_{(t)} = \left\{ e^{-\frac{k_y^2}{p} \cdot t} \right.$

$H_{(y,t)} = \sum_n \left(A_n \cdot \sin k_y (y-a) + B_n \cdot \cos k_y (y-a) \right) \cdot e^{-\frac{k_y^2}{p} \cdot t}$

$y = 0 \rightarrow H_{(0,t)} \neq 0$ und $y = a \Rightarrow H_{(y,t)} = 0 \Rightarrow B_n = 0$

$\underline{t \leq 0:}$

$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \vec{J}_F \cdot \Delta l \rightarrow H_0 \cdot \Delta l = J_F \cdot \Delta l \rightarrow H_0 = J_F$

$H_{(y,t)} = \sum_n A_n \cdot \sin(k_y (y-a)) \cdot e^{-\frac{k_y^2}{p} \cdot t}$

$A_n \cdot \sin(k_y (y-a)) \cdot e^{-k_y^2/p \cdot t} = H_0 \Big|_{t \leq 0}$

$y = -a \Rightarrow \sin k_y (-2a) = 0 \quad k_y = \frac{n \pi}{2a}$

$A_n \cdot \underbrace{\int_0^a \sin(k_{yn} (y-a)) \cdot \sin(k_{ym} (y-a))\, dy}_{= \frac{a}{2} \delta_m^n} = J_F \cdot \int_0^a \sin k_{yn} (y-a) \cdot dy$

$-\frac{1}{k_y} \left[\cos k_{yn} (y-a) \right]_0^a$

$$A_n \cdot \frac{a}{2} = - \frac{J_F}{k_y} \cdot \left(\cos k_y (y-a) \right) \Big|_0^a$$

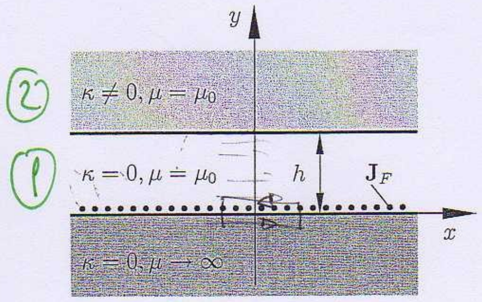
$$= - \frac{J_F}{k_y} \left(1 - \cos \left(\frac{n\pi}{2a} \cdot (-a) \right) \right)$$

$$= - \frac{J_F}{k_y} \left(1 - \cos \left(- \frac{n\pi}{2} \right) \right)$$

$$\boxed{A_n = - \frac{J_F \cdot 2}{a} \cdot \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right)}$$

Aufgabe B3

Der Halbraum $y < 0$ ist nichtleitend und hochpermeabel. Der Halbraum $y > h$ ist leitend und hat die Permeabilität μ_0, während der Zwischenraum $0 < y < h$ nichtleitend ist und ebenfalls die Permeabilität μ_0 aufweist. Auf der Oberfläche des hochpermeablen Halbraumes $y = 0$ fließt zusätzlich der Flächenstrom $\mathbf{J}_F = \mathbf{e}_z J_{F0} \cos \omega t$. Bestimme den Phasor der induzierten Wirbelstromdichte im leitenden Halbraum $y > h$ unter Vernachlässigung der Verschiebungsströme.



$\frac{d^2 H_x}{d s^2} = \underbrace{j\omega\mu_0\varkappa}_{k^2} H_x$ für $y \geq h \Rightarrow H_{x2} = A \cdot e^{-ky} = A \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta_s} y}$

$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\varkappa}}$ $\quad -H_{x1}\Delta s = J_{F0} \cdot \Delta s \rightarrow H_{x1} = \underbrace{-J_{F0}}_{const.}$ für $0 \leq y \leq h$

$H_{x1} = H_{x2} \Rightarrow H_x(y=h) = A \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta_s} \cdot h} = -J_{F0} \rightarrow A = -J_{F0} \cdot e^{\frac{1+j}{\delta_s} \cdot h}$

$\nabla \times \vec{H}_{x2} = \vec{J}_z \quad J_z = -\frac{\partial H_{x2}}{\partial y} = -J_{F0} \frac{1+j}{\delta_s} \cdot e^{-\frac{1+j}{\delta_s}(y-h)}$

Andere Weg: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = I$ $\quad \boxed{-H_{x1} = J_{F0}}$ const für $0 \leq y \leq h$

$\nabla^2 H_{x2} = \underbrace{j\omega\mu_0\varkappa}_{= k^2} \cdot H_{x2}$ $\quad \boxed{H_{x2} = A \cdot \sinh k(y-h) + B \cdot \cosh k(y-h)}$

$\nabla \times \vec{E}_{z1} = -j\omega\mu_0 H_{x1} \rightarrow E_{z1} = -j\omega\mu_0 \int H_{x1} \cdot dy \rightarrow \boxed{E_{z1} = j\omega\mu_0 J_{F0} \cdot y}$

$\nabla \times \vec{H}_{x2} = \vec{J} = \varkappa \cdot \vec{E}_{z2} \rightarrow E_{z2} = -\frac{1}{\varkappa} \frac{\partial H_{x2}}{\partial y} \rightarrow \boxed{E_{z2} = -\frac{k}{\varkappa}(A \cdot \cosh k(y-h) + B \cdot \sinh k(y-h))}$

$y = h$: $E_{z1} = E_{z2}$ und $H_{x1} = H_{x2}$

$j\omega\mu_0 J_{F0} \cdot h = -\frac{\sqrt{j\omega\mu_0\varkappa}}{\varkappa} \cdot A \Rightarrow \boxed{A = -k \cdot J_{F0} \cdot h}$

$\boxed{B = -J_{F0}}$