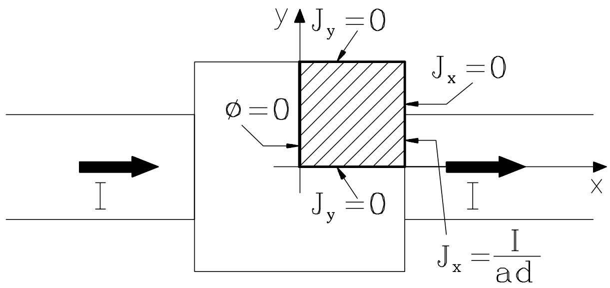
Lösung der Aufgabe 1



Lösungsansatz für den schraffierten Bereich:

$$\phi(x,y) = B_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

Berücksichtigung der Einspeisung am Ort $x = a$:

$$\mathrm{J}_x(x=a,y) = \kappa E_x(x=a,y) = -\kappa \frac{\partial \phi}{\partial x}\Big|_{x=a} = \begin{cases} I/(ad) & \text{für} \quad 0 \le y \le a/2 \\ 0 & \text{für} \quad a/2 < y \le a \end{cases}$$

Fourierentwicklung:

$$-\kappa\left[B_0 \underbrace{\int_0^a \cos\left(\frac{\nu\pi}{a}y\right)\,\mathrm{d}y}_{\substack{=0 \text{ für } \nu\neq 0 \\ =a \text{ für } \nu=0}} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi}{a}\cosh(n\pi) \underbrace{\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\cos\left(\frac{\nu\pi}{a}y\right)\,\mathrm{d}y}_{\substack{=a/2 \text{ für } n=\nu \\ =0 \text{ für } n\neq\nu}}\right] =$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{ad}\int_0^{a/2} \cos\left(\frac{\nu\pi}{a}y\right)\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{I}}{ad}\begin{cases} \frac{a}{\nu\pi}\sin\left(\frac{\nu\pi}{a}\frac{a}{2}\right) & \text{für} \quad \nu\neq 0 \\ a/2 & \text{für} \quad \nu = 0 \end{cases}$$

Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten:

$$-\kappa B_0 a = \frac{\mathrm{I}}{ad}\frac{a}{2} \quad , \quad -\kappa B_n \frac{n\pi}{a}\cosh(n\pi)\frac{a}{2} = \frac{\mathrm{I}}{ad}\frac{a}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{a}\frac{a}{2}\right)$$

Resultierendes Potential:

$$\phi(x,y) = -\frac{\mathrm{I}}{2\kappa ad}\left[x + 4a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{(n\pi)^2\cosh(n\pi)}\sinh\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{a}y\right)\right]$$

Lösung der Aufgabe 2

Potential des homogenen Feldes:

$$\phi_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\vartheta = -E_0 r^1 P_1\big(\cos\vartheta\big)$$

$\rightarrow$ Das gesamte Potential enthält nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme.

Potentialansätze mit $\phi_1\big(r=a\big)=0$:

$$\begin{array}{lcc}\phi_1 = A\left(\frac{r}{a}-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\vartheta & \text{für} & a \le r \le a+d \\ \phi_2 = -E_0 r\cos\vartheta + B\frac{a^2}{r^2}\cos\vartheta & \text{für} & a+d \le r\end{array}$$

Stetigkeitsbedingungen für $r = a + d =: b$:

$$\begin{array}{rclcrcll}\phi_1 & = & \phi_2 & \longrightarrow & A\left(\frac{b}{a}-\frac{a^2}{b^2}\right) & = & -E_0 b + B\frac{a^2}{b^2} & (i) \\ \varepsilon_r\frac{\partial\phi_1}{\partial r} & = & \frac{\partial\phi_2}{\partial r} & \longrightarrow & \varepsilon_r A\left(\frac{1}{a}+2\frac{a^2}{b^3}\right) & = & -E_0 - 2B\frac{a^2}{b^3} & (ii)\end{array}$$

Multipliziert man Gleichung (i) mit $\frac{2}{b}$ und addiert dann die beiden Gleichungen, so erhält man:

$$A\left(\big(2+\varepsilon_r\big)\frac{1}{a}+\big(\varepsilon_r-1\big)2\frac{a^2}{b^3}\right) = -3E_0$$

$$\boxed{\phi_1 = -\frac{3E_0 a}{\big(2+\varepsilon_r\big)+2\frac{a^3}{b^3}\big(\varepsilon_r-1\big)}\left(\frac{r}{a}-\frac{a^2}{r^2}\right)\cos\vartheta}$$

Lösung der Aufgabe 3

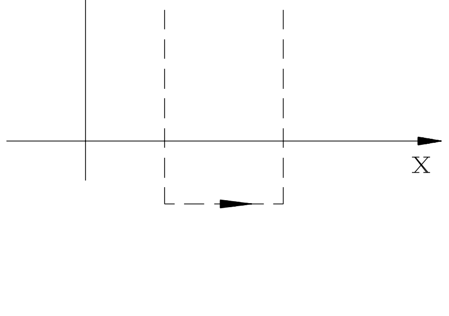
Diffusionsgleichung:

$$\mathbf{H} = \mathbf{e}_x H_x(y) \quad\rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}^2 H_x}{\mathrm{d}y^2} = j\omega\kappa\mu_0 H_x \quad , \quad y \ge h \quad \text{(kompl. Amplitude)}$$

Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} H_x &= A\exp\left(-\sqrt{j\omega\kappa\mu_0}\; y\right) \\ &= A\exp\left(-\frac{1+j}{\delta_s}y\right) \quad ; \quad \delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega\kappa\mu_0}} \end{aligned}$$

Umlaufintegral:



$$\oint \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = J_{F0}\Delta = -H_x(y=h)\Delta$$

$$\Rightarrow \quad A = -J_{F0}\exp\left[\frac{1+j}{\delta_s}h\right]$$

Wirbelstromdichte:

$$J_z = -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \underline{\underline{-J_{F0}\frac{1+j}{\delta_s}\exp\left[-\frac{1+j}{\delta_s}(y-h)\right]}}$$

Lösung der Aufgabe 4

Einfallende Welle:

$$E_{\varrho e} = E_0\,\frac{a}{\varrho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} \quad , \quad H_{\varphi e} = -E_{\varrho e}/Z_0$$

$$\text{mit} \quad k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \quad , \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Transversalfeld für $z \leq 0$:

$$E_{\varrho 1} = E_0\,\frac{a}{\varrho}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} + R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0 z}\right\} \quad , \quad H_{\varphi 1} = \frac{E_0}{Z_0}\,\frac{a}{\varrho}\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_0 z} - R\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_0 z}\right\} \quad ,$$

Transversalfeld für $z \geq 0$:

$$E_{\varrho 2} = E_0\,\frac{a}{\varrho}\,D\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z(z-l)} - \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_z(z-l)}\right\} \quad , \quad H_{\varphi 2} = \frac{E_0}{Z}\,\frac{a}{\varrho}\,D\left\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_z(z-l)} + \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_z(z-l)}\right\}$$

$$\text{mit} \quad k_z = \omega\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon_r\mu_0} \quad , \quad Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}$$

Stetigkeitsbedingungen für $z = 0$:

$$E_{\varrho 1} = E_{\varrho 2} \quad \rightarrow \quad 1 + R = D\,2\mathrm{j}\,\sin kl$$

$$H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2} \quad \rightarrow \quad 1 - R = D\,2\,\frac{Z_0}{Z}\,\cos kl$$

Die Division der eben hergeleiteten Gleichungen ergibt den Reflexionsfaktor:

$$\frac{1+R}{1-R} = \mathrm{j}\,\frac{Z}{Z_0}\,\tan kl \quad \rightarrow \quad R = \frac{\mathrm{j}\,Z\,\tan kl - Z_0}{\mathrm{j}\,Z\,\tan kl + Z_0}$$