Lösung der Aufgabe 1

Es liegt ein rotationssymmetrisches Randwertproblem in Zylinderkoordinaten vor. Die Periodizität der Anordnung erfordert einen periodischen Lösungsansatz in z–Richtung. Bei der Separation der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten bieten sich einem zwei grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten. Entweder man wählt in radialer Richtung gewöhnliche Besselfunktionen und Neumannfunktionen und erhält damit in achsialer Richtung die nicht orthogonalen Hyperbel– oder Exponentialfunktionen. Oder aber man wählt die modifizierten Zylinderfunktionen, wodurch sich in achsialer Richtung orthogonale, trigonometrische Funktionen ergeben. Im vorliegenden Fall entscheiden wir uns wegen der periodischen Anordnung in z–Richtung für die zweite Möglichkeit mit dem rotationssymmetrischen Lösungsansatz

$$\boxed{\begin{aligned} \phi(\varrho, z) &= (A_0 + B_0 \ln \varrho) \cdot (C_0 + D_0 z) + \\ &+ \sum_{p \neq 0} [A_p\, I_0(p\varrho) + B_p\, K_0(p\varrho)] \cdot [C_p\, \cos pz + D_p\, \sin pz] \end{aligned}} \quad . \tag{1}$$

Hierin bezeichnen $I_0(x)$ und $K_0(x)$ die modifizierten Besselfunktionen 0–ter Ordnung und 1. bzw. 2. Art. Aufgrund ihres singulären Verhaltens auf der Achse $\varrho = 0$ scheiden der natürliche Logarithmus sowie die modifizierte Besselfunktion 2. Art von vornherein aus. Ein linearer Term in z–Richtung ist aufgrund der Periodizität der Anordnung ebenfalls nicht möglich.
Der zur Ebene $z = 0$ schiefsymmetrische Potentialverlauf läßt weiterhin nur Sinusfunktionen im Ansatz zu. Zur Ebene $z = (h + d)/2$ dagegen wird sich das Potential symmetrisch ausbilden, so daß damit auch die Separationskonstanten p in der Form

$$p = \frac{n\pi}{L} \quad , \quad n = 1, 3, 5 \ldots \tag{2}$$

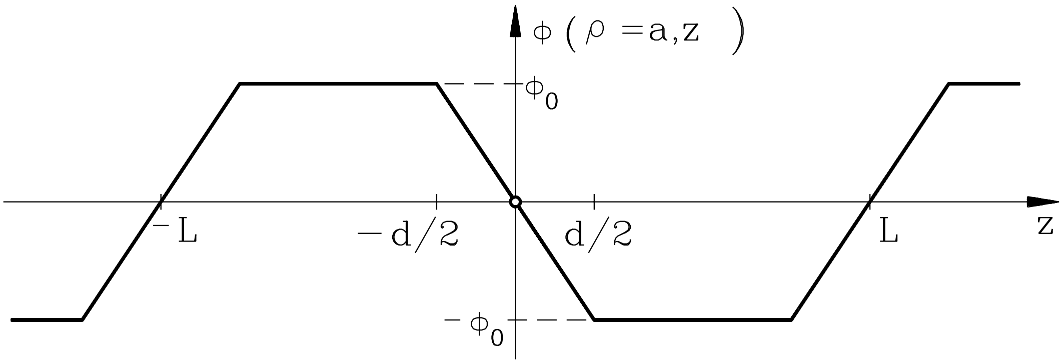
bereits vorliegen und wir erhalten den reduzierten Potentialansatz

$$\phi(\varrho, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi\varrho}{L}\right) \sin \frac{n\pi z}{L} \tag{3}$$

$$\text{mit} \quad L = h + d \quad .$$

Die Konstanten A_n lassen sich durch eine Fourieranalyse des bekannten Potentialverlaufs auf der Fläche $\varrho = a$ berechnen:

$$\phi(\varrho = a, z) = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \sin \frac{n\pi z}{L} = -\phi_0 \begin{cases} 2z/d & , \quad 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \\ 1 & , \quad \frac{d}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \end{cases} \tag{4}$$



In der eben notierten Potentialverteilung wurde nur ein Viertel der gesamten Periodenlänge betrachtet. Dies ist aus Symmetriegründen auch vollkommen ausreichend, da die Funktionen $\sin \frac{n\pi z}{L}$, mit $n = 1, 3, 5 \ldots$, allen Symmetrieanforderungen Rechnung tragen.
Zwecks Auflösung nach den noch unbekannten Konstanten A_n wird die Gleichung nun auf beiden Seiten mit den Funktionen $\sin \frac{m\pi z}{L}$ multipliziert und über den Orthogonalitätsbereich $0 \leq z \leq \frac{L}{2}$ integriert:

$$\sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi a}{L}\right) \underbrace{\int_0^{L/2} \sin\frac{n\pi z}{L}\,\sin\frac{m\pi z}{L}\,\mathrm{d}z}_{\frac{L}{4}\,\delta_m^n} =$$

$$= -\frac{2}{d}\,\phi_0 \underbrace{\int_0^{d/2} z\,\sin\frac{m\pi z}{L}\,\mathrm{d}z}_{\mathcal{I}_{1m}} - \phi_0 \underbrace{\int_{d/2}^{L/2} \sin\frac{m\pi z}{L}\,\mathrm{d}z}_{\mathcal{I}_{2m}}$$

Mit den Integralen

$$\mathcal{I}_{1m} = \left[\frac{\sin\frac{m\pi z}{L}}{(m\pi/L)^2} - \frac{z\,\cos\frac{m\pi z}{L}}{m\pi/L}\right]_0^{d/2} \qquad \texttt{Br.\# 279}$$

$$\mathcal{I}_{2m} = -\left[\frac{\cos\frac{m\pi z}{L}}{m\pi/L}\right]_{d/2}^{L/2}$$

$$\rightarrow \quad \frac{2}{d}\,\mathcal{I}_{1m} + \mathcal{I}_{2m} = \frac{2}{d}\,\frac{L^2}{m^2\pi^2}\,\sin\frac{m\pi d}{2L} = \frac{L}{m\pi}\,\mathrm{si}\left(\frac{m\pi d}{2L}\right)$$

ergibt sich schließlich das resultierende Potential

$$\boxed{\frac{\phi(\varrho, z)}{\phi_0} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n}\,\mathrm{si}\left(\frac{n\pi d}{2L}\right)\frac{I_0\left(\frac{n\pi\varrho}{L}\right)}{I_0\left(\frac{n\pi a}{L}\right)}\,\sin\frac{n\pi z}{L}} \quad . \tag{5}$$

Lösung der Hausaufgabe

Potentialansätze:

Aufgrund der speziellen Potentialvorgabe wird nur ein Glied der allgemeinen Lösungssumme angeregt!

$$\varrho \leq a: \quad \phi_1 = A\, I_0\left(\frac{\pi\varrho}{h}\right)\,\sin\frac{\pi z}{h} \quad , \quad \varrho \geq a: \quad \phi_2 = B\, K_0\left(\frac{\pi\varrho}{h}\right)\,\sin\frac{\pi z}{h}$$

Stetigkeitsbedingungen für $\varrho = a$:

$$\phi_1 = \phi_2 \qquad \rightarrow \qquad A\, I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right) = B\, K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)$$

$$\varepsilon_r\,\frac{\partial\phi_1}{\partial\varrho} - \frac{\partial\phi_2}{\partial\varrho} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\,\sin\frac{\pi z}{h} \qquad \rightarrow \qquad \varepsilon_r\, A\, I_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) + B\, K_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) = \frac{h}{\pi}\frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$$

Auflösung nach den unbekannten Konstanten:

$$B = \frac{h}{\pi}\frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\frac{I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}{\varepsilon_r\, K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)\ I_1\left(\frac{\pi a}{h}\right) + I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)\ K_1\left(\frac{\pi a}{h}\right)} \quad , \quad A = B\,\frac{K_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}{I_0\left(\frac{\pi a}{h}\right)}$$