Lösung der Aufgabe 1

Aufgrund der nicht verhandenen räumlichen Stromdichte gilt für das magnetische Vektorpotential die Laplacegleichung. Da ferner ein ebenes Problem mit allein z–gerichteten Strömen vorliegt weist das Vektorpotential auch nur eine z–Komponente auf. Die zu lösende Feldgleichung lautet also in Polarkoordinaten

$$\Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1}$$

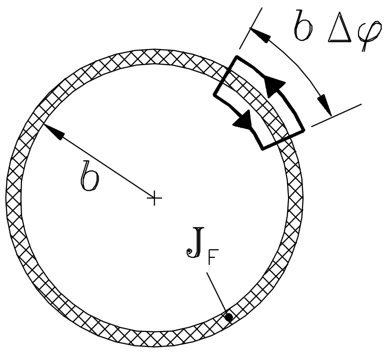
mit dem allgemeinen Lösungsansatz

$$\boxed{\begin{gathered} A(\varrho,\varphi) = (A_0 + B_0\varphi)(C_0 + D_0 \ln\frac{\varrho}{a}) + \\ + \sum_{m\neq 0}(A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\left(C_m \frac{\varrho^m}{a^m} + D_m \frac{a^m}{\varrho^m}\right) \end{gathered}} \quad . \tag{2}$$

a) Die Komponenten des magnetischen Feldes ergeben sich mit $\mathbf{A} = A(\varrho,\varphi)\,\mathbf{e}_z$ zu

$$\mu_0 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \rightarrow \quad \mu_0 H_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial A}{\partial \varphi} \quad , \quad \mu_0 H_\varphi = -\frac{\partial A}{\partial \varrho} \quad . \tag{3}$$

Zur Erfassung des erregenden Strombelages auf dem Zylindermantel $\varrho = b$ bilden wir ein elementares Umlaufintegral



$$\oint \mathbf{H}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = (0 - H_\varphi|_{\varrho=b})b\Delta\varphi = J_{F0} b\Delta\varphi \sin\varphi$$

$$\rightarrow \quad \left.\frac{\partial A}{\partial \varrho}\right|_{\varrho=b} = \mu_0 J_{F0} \sin\varphi \tag{4}$$

Aus der eben hergeleiteten Beziehung läßt sich schließen, daß Vektorpotential und Strombelag die gleiche φ-Abhängigkeit haben. Mit anderen Worten: Es braucht nur das Glied $m = 1$ der allgemeinen Lösung berücksichtigt zu werden.

$$A(\varrho,\varphi) = \left(C\frac{\varrho}{a} + D\frac{a}{\varrho}\right)\sin\varphi \quad , \quad \frac{\partial A}{\partial\varrho} = \left(C\frac{1}{a} - D\frac{a}{\varrho^2}\right)\sin\varphi \tag{5}$$

Auf dem Zylinder $\varrho = a$ muß die Tangentialkomponente des Feldes verschwinden

$$H_\varphi|_{\varrho=a} = 0 \quad \rightarrow \quad C = D$$

und aufgrund der Randbedingung auf dem Zylinder $\varrho = b$ folgt

$$D\left\{\frac{1}{a} - \frac{a}{b^2}\right\} = \mu_0 J_{F0} \quad \rightarrow \quad D = \mu_0 J_{F0} b\,\frac{1}{b/a - a/b}$$

$$\boxed{A(\varrho,\varphi) = \mu_0 J_{F0} b\,\frac{\varrho/a + a/\varrho}{b/a - a/b}\sin\varphi} \quad . \tag{6}$$

b) Entlang einer magnetischen Feldlinie sind die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ und das gerichtete Wegelement $\mathrm{d}\mathbf{s}$ parallel, d.h. es verschwindet das Kreuzprodukt aus diesen beiden Vektoren

$$\mathrm{d}\mathbf{s}\times\mathbf{B} = \mathrm{d}\mathbf{s}\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \mathrm{d}\mathbf{s}\times(\nabla A\times\mathbf{e}_z) = -\mathbf{e}_z(\underbrace{\mathrm{d}\mathbf{s}\cdot\nabla A}_{\mathrm{d}\,A}) = 0 \quad . \tag{7}$$

Da also die totale Änderung des Potentials entlang einer magnetischen Feldlinie verschwindet, gilt schließlich:

$$\boxed{\text{Feldliniengleichung:} \quad A(\varrho,\varphi) = \text{const.}} \tag{8}$$

Zwar verschwindet die magnetische Feldstärke in den hochpermeablen Bereichen, dies gilt jedoch nicht für das Vektorpotential. Wir setzen es in der Form

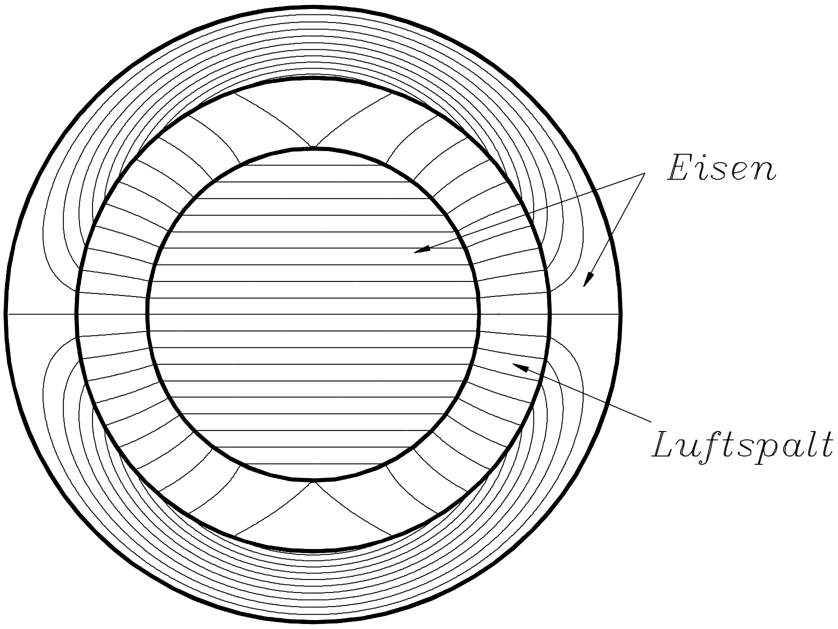
$$\varrho \le a \quad \rightarrow \quad A(\varrho,\varphi) = E\,\frac{\varrho}{a}\,\sin\varphi \tag{9}$$

$$b \le \varrho \le c \quad \rightarrow \quad A(\varrho,\varphi) = F\,\left(\frac{\varrho}{c} - \frac{c}{\varrho}\right)\sin\varphi \tag{10}$$

an, welche bereits garantiert, daß kein magnetischer Fluß in den Außenraum austreten kann. Da das Potential an den Bereichsgrenzen $\varrho = a$ und $\varrho = b$ stetig an das Ergebnis der Aufgabe a) anknüpfen muß, können wir auch sofort die Konstanten E und F angeben:

$$E = \frac{2\mu_0 J_{F0} b}{b/a - a/b} \quad , \quad F = \frac{\mu_0 J_{F0} b}{b/c - c/b}\,\frac{b/a + a/b}{b/a - a/b} \tag{11}$$

Jetzt lassen sich im gesamten Bereich die Feldlinien berechnen.



c) Drehmoment=Hebelarm×Kraft. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung braucht nur ein Strang der Doppelleitung betrachtet zu werden. Der Einfluß des anderen wird durch einen Faktor 2 erfaßt. Damit ergibt sich das Drehmoment pro Längeneinheit

$$M' = 2aF'_\varphi = 2aIB_\varrho|_{\varrho=a} = 2I \left.\frac{\partial A}{\partial \varphi}\right|_{\varrho=a,\varphi=\alpha}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{M' = 4\mu_0 J_{F0} I b \,\frac{\cos\alpha}{b/a - a/b}} \,. \tag{12}$$

Lösung der Hausaufgabe

Die Polarisationsflächenladung ist: $q_{F,pol} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = \big(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\varrho\big)P_0 = P_0\cos\varphi$

Für das elektrostatische Potential gilt $\nabla^2\phi = 0$ und mit $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ erhält man:

$$E_\varphi = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} \qquad \text{und} \qquad E_\varrho = -\frac{\partial\phi}{\partial\varrho}$$

Die Stetigkeitsbedingungen für $\varrho = a$ lauten:

$$(i) \qquad \varepsilon_0\big(E_{\varrho 2} - E_{\varrho 1}\big) = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial \varrho} - \frac{\partial \phi_2}{\partial \varrho}\right) = P_0 \cos\varphi$$

$$(ii) \qquad E_{\varphi 1} = E_{\varphi_2} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial \phi_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial \phi_2}{\partial \varphi}$$

Die Potentialansätze enthalten wegen (i) nur das Glied $n = 1$ der Lösungssumme:

$$\phi_1 = C\frac{\varrho}{a}\cos\varphi \qquad \text{und} \qquad \phi_2 = D\frac{a}{\varrho}\cos\varphi$$

Wenn man die Potentialansätze in die Stetigkeitsbedingungen einsetzt, erhält man:

$$(ii) \quad C = D \quad , \quad (i) \quad 2C\frac{1}{a} = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad C = D = \frac{P_0 a}{2\varepsilon_0}$$

Das elektrische Potential und das elektrische Feld innerhalb des Zylinders lauten somit:

$$\phi_1 = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\varrho\cos\varphi = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}x \quad , \quad \mathbf{E}_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\mathbf{e}_x = \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\mathbf{e}_x$$