Lösung der Aufgabe 1

a) Das elektromagnetische Feld in den einzelnen Teilräumen setzt sich aus vor– und rücklaufenden Wellen zusammen. Wir verwenden die Phasorenschreibweise, wobei auf eine gesonderte Kennzeichnung komplexer Größen verzichtet wird. Beachtet man, daß ein positives Vorzeichen im Argument der die Wellenausbreitung beschreibenden Exponentialfunktion eine Welle in negative z–Richtung beschreibt, so lauten die Feldansätze:

$$\text{Raum 1} \qquad \mathbf{H}_1 = H_0 \left\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} + R_{12}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z} \right\} \mathbf{e}_y$$

$$\frac{\mathbf{E}_1}{Z_1} = H_0 \left\{ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 z} - R_{12}\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 z} \right\} \mathbf{e}_x$$

$$\text{Raum 2} \qquad \mathbf{H}_2 = H_0 \left\{ A_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} + B_2\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z} \right\} \mathbf{e}_y$$

$$\frac{\mathbf{E}_2}{Z_2} = H_0 \left\{ A_2\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} - B_2\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 z} \right\} \mathbf{e}_x$$

$$\text{Raum 3} \qquad \mathbf{H}_3 = H_0 \left\{ A_3\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_3 z} + B_3\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_3 z} \right\} \mathbf{e}_y$$

$$\frac{\mathbf{E}_3}{Z_3} = H_0 \left\{ A_3\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_3 z} - B_3\, \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_3 z} \right\} \mathbf{e}_x$$

Dabei sind die eingeführten Wellenwiderstände Z_i und Freiraumwellenzahlen k_i materialabhängig und lauten:

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\,\pi\,\Omega \quad , \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{k2}}} \quad , \quad Z_3 = \sqrt{\frac{\mu_3}{\varepsilon_3}}$$

$$k_1^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \quad , \quad k_2^2 = \omega^2 \varepsilon_{k2} \mu_2 \quad , \quad k_3^2 = \omega^2 \varepsilon_3 \mu_3$$

Die Leitfähigkeit im Raum 2 wurde in Form einer komplexen Dielektrizitätskonstanten berücksichtigt

$$\varepsilon_{k2} = \varepsilon_2 \left(1 - \mathrm{j}\, \frac{\kappa}{\omega \varepsilon_2} \right) \quad .$$

Man beachte insbesondere auch die negativen Vorzeichen vor den rücklaufenden Wellentermen bei der elektrischen Feldstärke. Dieses hat seine Ursache in der Forderung, daß der Poyntingsche Vektor bei den rücklaufenden Wellen gefälligst in negative z–Richtung zu weisen hat.

Wenden wir uns nun den Randbedingungen zu. Wir beginnen mit der perfekt leitenden Ebene und legen willkürlich dort den Koordinatenursprung $z = 0$ fest.

Randbedingung in der Ebene $z = 0$

$$E_3\Big|_{z=0} \stackrel{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad A_3 = B_3 =: \frac{1}{2}C_3$$

Mit dieser Festlegung vereinfacht sich der Ansatz für das elektromagnetische Feld

$$\begin{aligned} H_3 &= H_0 C_3 \cos k_3 z \\ E_3 &= -\mathrm{j} Z_3 H_0 C_3 \sin k_3 z \quad . \end{aligned}$$

Stetigkeitsbedingungen in der Ebene $z = -d_3$

$$\begin{aligned} H_2\Big|_{z=-d_3} \stackrel{!}{=} H_3\Big|_{z=-d_3} \quad &\rightarrow \quad A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 d_3} + B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 d_3} = C_3 \cos k_3 d_3 \\ E_2\Big|_{z=-d_3} \stackrel{!}{=} E_3\Big|_{z=-d_3} \quad &\rightarrow \quad Z_2\left\{A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 d_3} - B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 d_3}\right\} = \mathrm{j}\, Z_3 C_3 \sin k_3 d_3 \end{aligned}$$

Bilden wir Summe und Differenz der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$2A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 d_3} = C_3\left\{\cos k_3 d_3 + \mathrm{j}\,\frac{Z_3}{Z_2}\,\sin k_3 d_3\right\} \tag{1}$$

$$2B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 d_3} = C_3\left\{\cos k_3 d_3 - \mathrm{j}\,\frac{Z_3}{Z_2}\,\sin k_3 d_3\right\} \quad . \tag{2}$$

Stetigkeitsbedingungen in der Ebene $z = -d_3 - d_2 =: -D$

$$\begin{aligned} H_1\Big|_{z=-D} \stackrel{!}{=} H_2\Big|_{z=-D} \quad &\rightarrow \quad \mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 D} + R_{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 D} = A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 D} + B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 D} \\ E_1\Big|_{z=-D} \stackrel{!}{=} E_2\Big|_{z=-D} \quad &\rightarrow \quad Z_1\left\{\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 D} - R_{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 D}\right\} = Z_2\left\{A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 D} - B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 D}\right\} \end{aligned}$$

Wieder bilden wir Summe und Differenz der beiden letzten Gleichungen und erhalten

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 D}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) + R_{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 D}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) = 2A_2\,\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_2 D} \tag{3}$$

$$\mathrm{e}^{+\mathrm{j}k_1 D}\left(1 - \frac{Z_1}{Z_2}\right) + R_{12}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_1 D}\left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) = 2B_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 D} \quad . \tag{4}$$

Jetzt gehts ans Auflösen nach dem gesuchten Reflexionsfaktor. Die Division der Gleichungen (1) und (2) ergibt

$$A_2 = B_2\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_2 d_3}\,\mathcal{F} \quad \text{mit} \quad \mathcal{F} = \frac{Z_2\,\cos k_3 d_3 + \mathrm{j}\,Z_3\,\sin k_3 d_3}{Z_2\,\cos k_3 d_3 - \mathrm{j}\,Z_3\,\sin k_3 d_3} \quad .$$

Wir können nun in Gl.(3) A_2 durch B_2 ausdrücken und die Gleichungen (3) und (4) durcheinander dividieren. Das Resultat ist

$$\frac{(Z_2 + Z_1) + R_{12}(Z_2 - Z_1)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_1 D}}{(Z_2 - Z_1) + R_{12}(Z_2 + Z_1)\,\mathrm{e}^{-2\mathrm{j}k_1 D}} = \mathcal{F}\ \mathrm{e}^{+2\mathrm{j}k_2 d_2}$$

oder nach dem gesuchten Reflexionsfaktor umgestellt

$$\boxed{R_{12} = \frac{(Z_1 - Z_2)\,\mathcal{F}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_2 d_2} + (Z_1 + Z_2)}{(Z_1 + Z_2)\,\mathcal{F}\,\mathrm{e}^{2\mathrm{j}k_2 d_2} + (Z_1 - Z_2)}\ \mathrm{e}^{+2\mathrm{j}k_1 D}} \quad .$$

b) Unter bestimmten Voraussetzungen ist es möglich bei einer bestimmten Frequenz den Reflexionsfaktor zu Null zu machen, d.h.

$$R_{12} \stackrel{!}{=} 0 \quad .$$

Die genannten Voraussetzungen sind die folgenden:

(i) $d_3 = \lambda_3/4 \quad \rightarrow \quad k_3 d_3 = \pi/2 \quad \rightarrow \quad \mathcal{F} = -1$

(ii) $d_2 \ll \delta_s$ (große Eindringtiefe im Medium 2)

(iii) $\kappa_2/\omega\varepsilon_2 \gg 1$ (Verschiebungsströme in Raum 2 vernachlässigbar)

Damit erhalten wir als Bedingung für die Absorption einer Radarwelle

$$(Z_2 + Z_1) + (Z_2 - Z_1)\,\mathrm{e}^{+2\mathrm{j}k_2 d_2} \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Für den Wellenwiderstand im Raum 2 kann man zusammen mit der 3. Voraussetzung schreiben

$$Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_{k2}}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2\left(1 - \mathrm{j}\dfrac{\kappa_2}{\omega\varepsilon_2}\right)}} \approx \sqrt{\mathrm{j}\,\frac{\omega\mu_2}{\kappa_2}} \quad .$$

Mit $\sqrt{\mathrm{j}} = \dfrac{1+\mathrm{j}}{\sqrt{2}}$ und der Skineindringtiefe $\delta_s = \sqrt{\dfrac{2}{\omega\kappa_2\mu_2}}$ wird daraus

$$\boxed{Z_2 \approx \frac{1}{\kappa_2}\,\frac{1+\mathrm{j}}{\delta_s}}\ .$$

Ähnlich gehen wir bei der Berechnung der Wellenzahl im Raum 2 vor:

$$k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_{k2}\mu_2} = \omega\sqrt{\varepsilon_2\mu_2\left(1 - \mathrm{j}\,\frac{\kappa_2}{\omega\varepsilon_2}\right)} \approx \omega\sqrt{-\mathrm{j}\,\frac{\kappa_2\mu_2}{\omega}}$$

Wegen $\sqrt{-1} = \pm \mathrm{j}$ können wir schreiben

$$k_2 \approx \pm\,\mathrm{j}\,\kappa_2 Z_2\ .$$

An dieser Stelle erhebt sich die Frage für welches Vorzeichen wir uns zu entscheiden haben. Die Mehrdeutigkeit des Ergebnisses, die uns die Mathematik beschert, muß mit Hilfe physikalischer Überlegungen zu einem eindeutigen Resultat geführt werden. Wir setzen das Vorzeichen so fest, daß eine ebene Welle, die sich in einem Medium mit den Materialeigenschaften des Raumes 2 ausbreitet, gedämpft wird, d.h. mit anderen Worten

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_2 z} \to 0 \quad \text{für} \quad z \to \infty \qquad \to \qquad \boxed{k_2 \approx -\mathrm{j}\kappa_2 Z_2}$$

Wegen $|k_2 d_2| = \sqrt{2} d_2/\delta_s \ll 1$ nähern wir noch die Exponentialfunktion nach TAYLOR und brechen nach dem linearen Glied ab

$$\boxed{\mathrm{e}^{+2\mathrm{j}k_2 d_2} \approx 1 + 2\mathrm{j}\,k_2 d_2} \quad .$$

Die Bedingung für verschwindende Reflexion nimmt nun die Form

$$(Z_2 - Z_1)(1 + 2\mathrm{j}\,k_2 d_2) + Z_2 + Z_1 \overset{!}{=} 0 = 2Z_2\,\underbrace{(1 + \mathrm{j}\,k_2 d_2)}_{\approx\, 1} - 2Z_1\,\underbrace{\mathrm{j}\,k_2 d_2}_{\approx\, \kappa_2 d_2 Z_2}$$

an. Daraus folgt als Dimensionierungsvorschrift für das Medium 2

$$\to \qquad \boxed{\kappa_2 d_2 \approx \frac{1}{Z_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}} \quad .$$

Die Frequenz der absorbierten Radarwelle kann aus der ersten Voraussetzung gewonnen werden:

$$k_3 d_3 = \omega\sqrt{\varepsilon_3 \mu_3}\, d_3 \overset{!}{=} \frac{\pi}{2} \qquad \to \qquad \boxed{f = \frac{1}{4 d_3 \sqrt{\varepsilon_3 \mu_3}}}$$

Frequenzgang des Reflexionsfaktors

Mit der eben abgeleiteten Bedingung für verschwindende Reflexion, die natürlich nur für eine Frequenz gilt, läßt sich der Betrag des Reflexionsfaktors in der vereinfachten Form

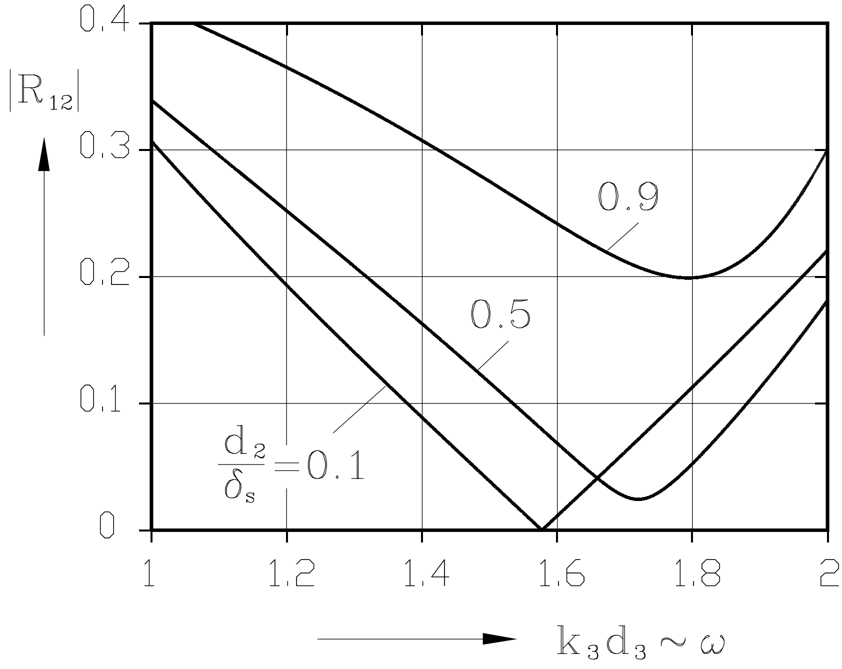
$$\boxed{|R_{12}| = \left| \frac{(1-\eta)\mathcal{F}\,\mathrm{e}^{2\eta} + (1+\eta)}{(1+\eta)\mathcal{F}\,\mathrm{e}^{2\eta} + (1-\eta)} \right|} \tag{5}$$

mit

$$\mathcal{F} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}\,\eta\,\cos\zeta + \mathrm{j}\,\sin\zeta}{\sqrt{\varepsilon_r}\,\eta\,\cos\zeta - \mathrm{j}\,\sin\zeta}$$

$$\eta = \frac{Z_2}{Z_1} = (1+\mathrm{j})\,\frac{d_2}{\delta_s} \quad , \quad \zeta = k_3 d_3$$

berechnen. Hierbei wurde außerdem von einer konstanten Permeabilität $\mu = \mu_0$ des gesamten Raumes ausgegangen und die Dielektrizitätskonstante im Raum 3 gleich $\varepsilon_0\varepsilon_r$ gesetzt. Das Bild zeigt den Verlauf des Betrags des Reflexionsfaktors in Abhängigkeit von der Frequenz für verschiedene Eindringtiefen.



Loesung der Hausaufgabe

a) Aufspalten des gesamten Feldes in einen emittierten und reflektierten Anteil

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_{0e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_e t - \mathbf{k}_e\cdot\mathbf{r})} \quad , \quad \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_r t - \mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r})} \quad , \quad \mathbf{E}_{0e} = E_{0e}\,\mathbf{e}_y \quad , \quad \mathbf{E}_{0r} = r_s\,\mathbf{E}_{0e}$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z \quad , \quad \mathbf{k} = k\mathbf{e}_k \quad , \quad \omega_e = \omega_r = \omega \quad , \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{e}_{k_e} = -\mathbf{e}_x\cos\alpha + \mathbf{e}_z\sin\alpha \quad , \quad \mathbf{e}_{k_r} = \mathbf{e}_x\cos\alpha + \mathbf{e}_z\sin\alpha$$

$$\mathbf{k}_e\cdot\mathbf{r} = -kx\cos\alpha + kz\sin\alpha \quad , \quad \mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r} = kx\cos\alpha + kz\sin\alpha$$

Einsetzen:

$$\mathbf{E}_e = E_{0e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + kx\cos\alpha - kz\sin\alpha)}\mathbf{e}_y$$

$$\kappa \to \infty \quad \Rightarrow \quad r_s = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}_r = -\mathbf{e}_y E_{0e}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx\cos\alpha - kz\sin\alpha)}$$

$$\mathbf{E}_{\text{ges}} = \mathbf{E}_e + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0e}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - kz\sin\alpha)}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}kx\cos\alpha} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{j}kx\cos\alpha}\right)}_{=\,2\mathrm{j}\sin(kx\cos\alpha)}$$

b) Die Wirkleistung wird in z-Richtung transportiert. Zu deren Berechnung wird die H_x- Komponente benötigt.

c)

$$H_x = \frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{E_{0e}}{\omega\mu}\,2\mathrm{j}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{j}(\omega t - kz\sin\alpha)} k\sin\alpha\,\sin(kx\cos\alpha)$$

Wirkleistungsdichte:

$$S_z = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right)_z = \frac{2E_{0e}^2}{\omega\mu}\sin^2(kx\cos\alpha)\,k\sin\alpha = \frac{2}{Z}E_{0e}^2\sin^2(kx\cos\alpha)\,\sin\alpha$$