Aufgabe A1

Bestimme die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + f = 1 \quad \text{mit} \quad f(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = 0 \quad .$$

hom. Lösg. $f_H = A\cos x + B\sin x$

part. " $f_P = 1$

Randbed. $\curvearrowright$ $B = 0$, $A = -1$

$\curvearrowright$ $f(x) = 1 - \cos x$

Aufgabe A2

Gegeben sei die Randwertaufgabe

$$\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} = \lambda\,\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial y} \quad \text{mit} \quad \phi(x=0,y) = \phi_0\,\mathrm{e}^{-y/a} \quad ,$$

wobei λ und a reelle Konstanten sind. Berechne die Funktion $\phi(x,y)$ mit Hilfe des Separationsansatzes von Bernoulli.

$\phi(x,y) = X(x)\cdot Y(y) \rightarrow \underbrace{\frac{1}{X}\frac{dX}{dx}}_{=\lambda p} = \lambda\,\underbrace{\frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}}_{=p}$

$X(x) = A e^{\lambda p x}$, $Y(y) = B e^{py}$

Randbed. $\curvearrowright$ $AB = \phi_0$, $p = -1/a$

$\curvearrowright$ $\phi(x,y) = \phi_0\, e^{-\lambda x/a - y/a}$

Aufgabe A3

Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit zur Lösung eines magnetostatischen Randwertproblems die LAPLACEgleichung für das magnetische Skalarpotential ϕ_m, mit $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ verwendet werden kann? Gib ferner bei bekannter Magnetisierung den Zusammenhang zwischen der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$ und dem Skalarpotential ϕ_m an.

Voraussetzung 1. $\nabla^2\phi_m = 0$:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{0} \quad \underline{\text{und}} \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \rightarrow \vec{B} = -\mu_0 \nabla\phi_m + \mu_0 \vec{M}$$

Aufgabe A4

Ein System von Funktionen $f_n(x)$, mit $n = 1, 2, 3, \ldots$, habe die Eigenschaft

$$\int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x = \delta_m^n \quad ,$$

wobei $w(x)$ eine bekannte Gewichtsfunktion und δ_m^n das *Kronecker*-Delta sind.
Ferner wird angenommen, daß für eine gegebene Funktion $g(x)$ die konvergente Reihenentwicklung

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n(x)$$

existiert. Wie lauten dann die Koeffizienten a_n?
Wie nennt man weiterhin die obige Eigenschaft des Funktionensystems f_n?

$$a_n = \int_a^b f_n(x)\, g(x)\, w(x)\, dx$$

f_n erfüllt die Orthogonalitätsrelation

Aufgabe A5

Wie lautet der rotationssymmetrische und von der Koordinate z unabhängige Lösungsansatz für die LAPLACEgleichung in Zylinderkoordinaten?
Gib ein Beispiel für eine elektrostatische Anordnung an, bei dem der oben genannte Lösungsansatz ausreicht, um das Potential zu berechnen.

$$\Phi(\varrho) = A_0 + B_0 \ln \varrho$$

beschreibt z.B. das Potential in einem Koaxkabel

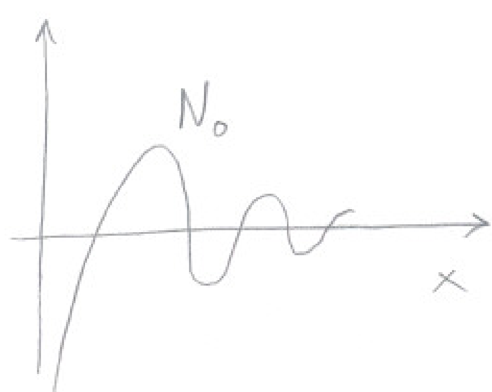
Aufgabe A6

Folgende Funktionen sind zu skizzieren:

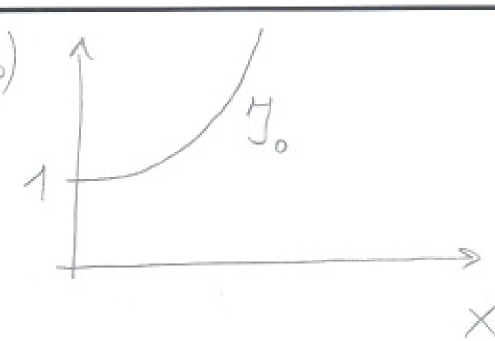
a) die NEUMANNsche Funktion $N_0(x)$

b) die modifizierte BESSELfunktion $I_0(x)$

a)

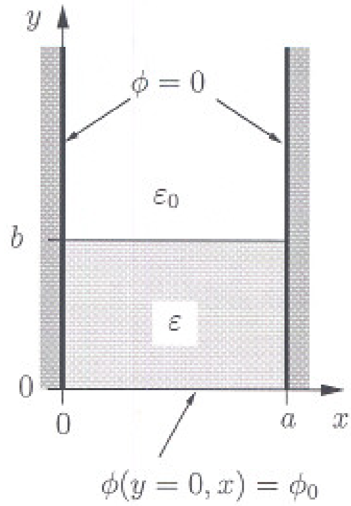


b)



Aufgabe B1

An den Stellen $x = 0$ und $x = a$ befinden sich zwei leitende, geerdete Platten, die sich in y- und z-Richtung ins Unendliche erstrecken. Dazwischen sei der Bereich $0 \leq y \leq b$ mit Dielektrikum ε ausgefüllt. Ferner soll das Potential in der Ebene $y = 0$ im Bereich $0 \leq x \leq a$ den konstanten Wert ϕ_0 aufweisen.



Zu bestimmen ist die Potentialverteilung $\phi(x, y)$ im Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq \infty$.

Ansätze:

$$\phi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cosh p_n y + B_n \sinh p_n y) \sin p_n x \quad \text{f. } 0 \leq y \leq b$$

$$\phi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-p_n(y-b)} \sin p_n x \quad \text{f. } y \geq b \, , \; p_n = \frac{n\pi}{a}$$

RB f. $y = 0$: $\quad \phi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin p_n x \rightarrow A_n = \phi_0 \frac{2}{a} \int_0^a \sin p_n x \, dx$

$\curvearrowright A_n = \frac{4\phi_0}{n\pi}$ für $n = 1, 3, 5 \ldots$, $\quad A_n = 0$ für $n = 2, 4, 6 \quad (1)$

Stetigkeitsbed. f. $y = b$:

$\phi_1 = \phi_2 \longrightarrow A_n \cosh p_n b + B_n \sinh p_n b = C_n \quad (2)$

$\varepsilon \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \longrightarrow \varepsilon (A_n \sinh p_n b + B_n \cosh p_n b) = -\varepsilon_0 C_n \quad (3)$

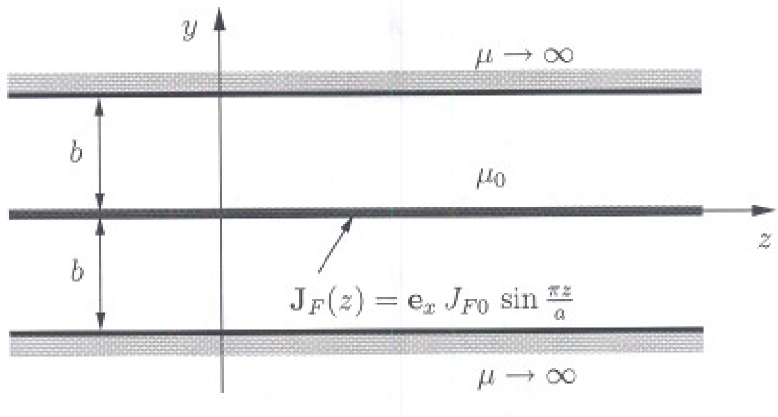
$(2), (3) \curvearrowright A_n (\varepsilon_0 \cosh p_n b + \varepsilon \sinh p_n b) +$
$+ B_n (\varepsilon_0 \sinh p_n b + \varepsilon \cosh p_n b) = 0$

$B_n = -A_n \frac{\varepsilon_0 \cosh p_n b + \varepsilon \sinh p_n b}{\varepsilon_0 \sinh p_n b + \varepsilon \cosh p_n b}$, A_n aus (1) und
C_n aus (2)

Aufgabe B2

In den Ebenen $y = -b$ und $y = b$ befinden sich zwei hochpermeable ($\mu \to \infty$), unendlich ausgedehnte Platten. Mittig dazwischen, in der Ebene $y = 0$, fließe ein Flächenstrom mit der örtlichen Verteilung

$$\mathbf{J}_F(z) = \mathbf{e}_x \, J_{F0} \sin\frac{\pi z}{a} \quad .$$



Zu bestimmen ist das magnetische Vektorpotential $\mathbf{A}(y, z)$ zwischen den hochpermeablen Platten.

x-gerichtetes Vektorpot. $\vec{A} = \vec{e}_x A_x(y, z)$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \curvearrowright B_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = 0$ f. $y = \pm b$

Ansatz f. $y > 0$: $A_x = C \cosh\frac{\pi(y-b)}{a} \sin\frac{\pi z}{a}$

Stetigkeitsbed. + Symmetrie:

$H_{t1} - H_{t2} = J_F \curvearrowright 2\frac{B_z(y=0)}{\mu_0} = J_{F0} \sin\frac{\pi z}{a}$

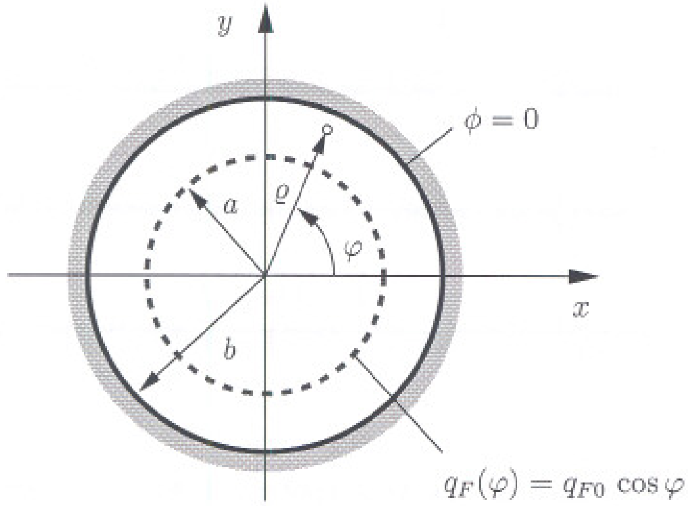
$\curvearrowright -\frac{2}{\mu_0}\frac{\pi}{a} C \sinh\frac{(-\pi b)}{a} = J_{F0}$

$\curvearrowright C = \frac{\mu_0 J_{F0}}{2}\frac{a}{\pi}\frac{1}{\sinh\frac{\pi b}{a}}$

Aufgabe B3

Innerhalb eines leitenden, geerdeten Kreiszylinders mit dem Radius b befinde sich eine zylindrische Flächenladung mit dem Radius a und der Flächenladungsdichte

$$q_F(\varphi) = q_{F0}\cos\varphi \quad .$$



Zu bestimmen ist die Potentialverteilung $\phi(\varrho,\varphi)$ für $0 \le \varrho \le b$.

Ansätze: $\phi_1 = A\,\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$ für $\varrho \le a$

$\phi_2 = B\left(\frac{\varrho}{b} - \frac{b}{\varrho}\right)\cos\varphi$ für $a \le \varrho \le b$

Stetigkeitsbed. f. $\varrho = a$:

$\phi_1 = \phi_2 \longrightarrow A = B\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$ (1)

$\frac{\partial\phi_1}{\partial\varrho} - \frac{\partial\phi_2}{\partial\varrho} = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}\cos\varphi \to \frac{A}{a} - B\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a^2}\right) = \frac{q_{F0}}{\varepsilon_0}$

$\to A = \frac{q_{F0}\,a}{\varepsilon_0} + B\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$ (2)

(1),(2) $\curvearrowright$ $B = -\frac{q_{F0}}{2\varepsilon_0}\frac{a^2}{b}$, A aus (1)