

UNIVERSITÄT PADERBORN

Fakultät EIM

Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

Klausur Theoretische Elektrotechnik A

MUSTERLÖSUNG

01. August 2007

Name:

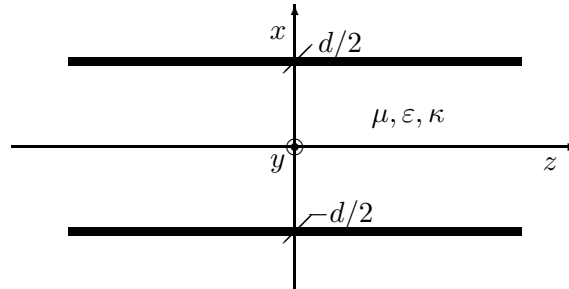
Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsnr.:

Aufgabe	1	2	3	4	HÜ	Summe
Punkte						

Betrachtet wird eine homogene Bandleitung (planarer Hohlleiter) mit perfekt leitender Berandung. Diese ist in  $y$ - und in  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnt. Falls nicht anders angegeben, gilt  $\kappa = 0$ .



Die transversalmagnetischen (TM) Felder der Bandleitung besitzen nur eine skalare Komponente und sind unabhängig von einer transversalen Koordinate (hier  $\frac{\partial}{\partial y} = 0$ ).

$$\vec{H} = \vec{e}_y H_y(x, z) \quad (1)$$

1. Leiten Sie die skalare Wellendifferentialgleichung für die  $y$ -Komponente der magnetischen Feldstärke im Frequenzbereich her.

Aus

$$\text{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \underline{H}_y & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_x \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial \underline{H}_y}{\partial x} = +j\omega\varepsilon \vec{E} \quad (2)$$

ergibt sich, das das elektrische Feld keine  $y$ -Komponente besitzt. Aus der Rotation der elektrischen Feldstärke ergibt sich damit:

$$\text{rot} \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \underline{E}_x & 0 & \underline{E}_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_y \left( \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} - \frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} \right) = -j\omega\mu \vec{H}. \quad (3)$$

Setzt man in diesen Ausdruck die sich aus (19) ergebenden elektrischen Feldkomponenten ein, folgt:

$$\frac{1}{j\omega\varepsilon} \vec{e}_y \left( \frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial z^2} \right) = j\omega\mu \vec{e}_y \underline{H}_y \Rightarrow \left( \frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial z^2} \right) + \underbrace{\omega^2 \varepsilon \mu}_{=\beta^2} \underline{H}_y = 0. \quad (4)$$

2. Der Grundmode der Bandleitung ist der TEM-Mode, ein Spezialfall mit  $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ . Geben Sie den elektrischen und magnetischen Phasor dieses Modes an.

Die Phasoren des TEM-Modes der Bandleitung unterscheiden sich nicht von denen einer  $x$ -polarisierten ebenen Welle.

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_y \underline{H}_0 e^{\mp j\beta z} \Rightarrow \vec{E}(z) = \vec{e}_x \frac{\pm\beta}{\omega\varepsilon} \underline{H}_0 e^{\mp j\beta z} = \pm \vec{e}_x \underbrace{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}_{=Z} \underline{H}_0 e^{\mp j\beta z} \quad (5)$$

3. Bestimmen Sie die folgenden Größen des TEM-Modes in Abhängigkeit der Geometrie- und Materialparameter:

- Wellenzahl  $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$
- Wellenlänge  $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}$
- Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$
- Gruppengeschwindigkeit  $v_g = v_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

4. **Geben Sie den magnetischen Phasor des nächst höheren TM-Modus an.**

Die bezüglich der perfekt leitenden Berandung transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke müssen am Ort der Berandung  $|x| = \frac{d}{2}$  verschwinden. Es ist sinnvoll einen um  $d/2$  verschobenen Ansatz zu wählen. Ansonsten muss explizit zwischen geraden und ungeraden Moden unterschieden werden. Der verschobene Ansatz berücksichtigt automatisch alle Moden:

$$\vec{H}(z) = \vec{e}_y H_0 \cos(\beta_x(x - d/2)) e^{\mp j\beta_z z}. \quad (6)$$

Der TM-Mode mit der niedrigsten Cut-Off-Frequenz ungleich Null ist gegeben mit:

$$\beta_x = \frac{\pi}{d}, \quad \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\pi}{d}\right)^2}. \quad (7)$$

5. **Nehmen Sie an, es breitet sich nur dieser eine Mode mit der Amplitude 1 aus. Berechnen Sie die  $z$ -Komponente des zeitabhängigen Poyntingvektors. Berücksichtigen Sie sowohl in positiver als auch in negativer  $z$ -Richtung propagierende Wellen**

$$\vec{e}_z \vec{S}_z(x, z, t) = \vec{e}_z (\vec{E} \times \vec{H}) = E_x H_y \quad (8)$$

$$\begin{aligned} S_z(x, z, t) &= \frac{\pm\beta}{\omega\varepsilon} \Re \left\{ \cos(\beta_x(x - d/2)) e^{j(\omega t \mp \beta_z z)} \right\} \Re \left\{ \cos(\beta_x(x - d/2)) e^{j(\omega t \mp \beta_z z)} \right\} \\ &= \frac{\pm\beta}{\omega\varepsilon} \cos^2(\beta_x(x - d/2)) \cos^2(\omega t \mp \beta_z z) \end{aligned} \quad (9)$$

6. **Begründen oder korrigieren Sie die folgenden Aussagen:**

- (a) **Der Grundmode (TEM-Mode) der verlustfreien Bandleitung ist dispersionsfrei.**

Die Wellenzahl  $\beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$  des TEM-Modus ist eine lineare Funktion der Frequenz. Damit ist dieser Mode dispersionsfrei

- (b) **Alle Moden der verlustfreien Bandleitung sind dispersionsfrei.**

Ein Vergleich mit (7) zeigt, dass die Wellenzahl des nächst höheren Modus keine lineare Funktion der Frequenz ist. Diese Aussage ist damit falsch.

- (c) **Der Grundmode der verlustbehafteten Bandleitung ( $\kappa \neq 0$ ) ist dispersionsfrei.**

Verluste in der Bandleitung können durch eine komplexe Permittivität ausgedrückt werden,  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon + \frac{\kappa}{j\omega})$ . Damit ist die Wellenzahl wiederum eine nichtlineare Funktion der Frequenz. Auch diese Aussage ist somit falsch.

- (d) **Die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden steigt mit abnehmender Schichtdicke  $d$  an.**

Die Gleichung (7) lautet verallgemeinert:

$$\beta_x = \frac{n\pi}{d}, \quad \beta_z = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Die Größe  $n$  wird auch als Modenzahl bezeichnet. Die Phasenkonstanten  $\beta_x$  werden mit wachsender Schichtdicke kleiner. Es passen somit mehr Lösungen in das Intervall  $0 < \beta_y < \beta$ . In diesem Intervall ist die Wurzel, und damit die Wellenzahl  $\beta_z$  reellwertig. Dieses Intervall kennzeichnet somit den Bereich der geführten Moden. Auch diese Aussage ist somit falsch.

- (e) **Die Anzahl ausbreitungsfähiger Moden steigt mit größer werdender Frequenz  $\omega$  an.**

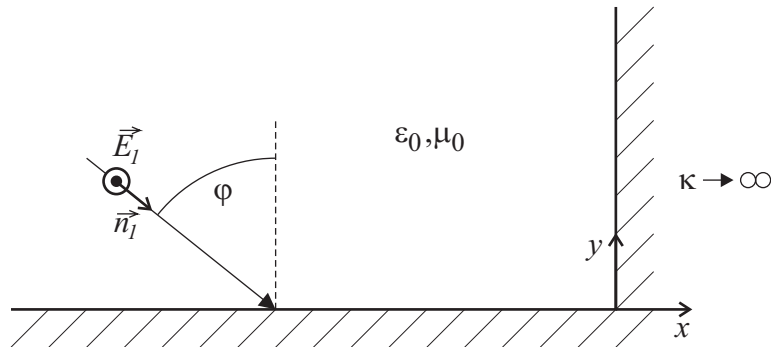
Mit größer werdender Frequenz wird der Bereich der geführten Moden, das Intervall  $0 < \beta_y < \beta$ , vergrößert. Diese Aussage ist somit richtig.

Nr.	Punkte

Eine ebene Welle im Vakuum ( $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$ ) mit dem elektrischen Feldvektor

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \underline{E}_0 e^{-jk\vec{n}_1 \cdot \vec{r}} \vec{e}_z$$

tritt unter den Winkel  $\varphi$  auf eine ideal leitende, metallische Ecke (vgl. Skizze).



1. Berechnen Sie das elektrische Feld mit Hilfe einer Überlagerung von insgesamt vier Teilwellen.

Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis in der Form

$$\vec{E}(x, y) = 4\underline{E}_0 \sin(k \sin \varphi x) \sin(k \cos \varphi y) \vec{e}_z$$

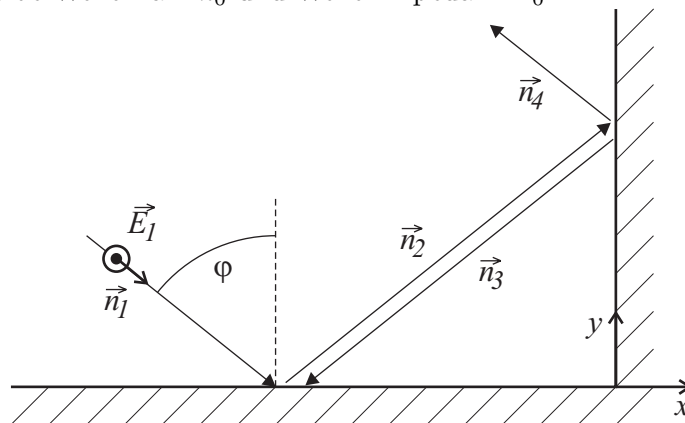
darstellen lässt.

Geben Sie auch das magnetische Feld an.

Die vier Teilwellen laut Skizze haben die folgenden Richtungsvektoren:

$$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_3 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_4 = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Für alle gilt dieselbe Wellenzahl  $k_0$  und Wellenimpedanz  $Z_0$ .



Für das elektrische Feld jeder Teilwelle (Index  $i$ ) ist also

$$\vec{E}_i = \underline{r}_i \underline{E}_0 e^{-jk_0 \vec{n}_i \cdot \vec{r}} \vec{e}_z \quad (12)$$

anzusetzen (mit  $\underline{r}_1 = 1$  und unbekanntem  $\underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{r}_4$ ).

Für die magnetischen Felder gilt

$$\vec{H}_i = \frac{1}{Z_0} \vec{n}_i \times \vec{E}_i \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_y \underline{E}_z \\ -n_x \underline{E}_z \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

also

$$\vec{H}_1 = \frac{\underline{E}_0}{Z_0} \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-jk_0 \vec{n}_1 \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_2 = \frac{\underline{r}_2 \underline{E}_0}{Z_0} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-jk_0 \vec{n}_2 \cdot \vec{r}} \quad (14)$$

$$\vec{H}_3 = \frac{\underline{r}_3 \underline{E}_0}{Z_0} \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-jk_0 \vec{n}_3 \cdot \vec{r}} \quad \vec{H}_4 = \frac{\underline{r}_4 \underline{E}_0}{Z_0} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} e^{-jk_0 \vec{n}_4 \cdot \vec{r}}. \quad (15)$$

(Wahlweise auch direkt über Rechte-Hand-Regel).

Für die Argumente der Exponentialfunktionen gilt dabei mit den Abkürzungen  $k_x = k_0 \sin \varphi$  und  $k_y = k_0 \cos \varphi$ :

$$-jk_0 \vec{n}_1 \cdot \vec{r} = -jk_x x + jk_y y, \quad -jk_0 \vec{n}_2 \cdot \vec{r} = -jk_x x - jk_y y, \quad (16)$$

$$-jk_0 \vec{n}_3 \cdot \vec{r} = jk_x x + jk_y y, \quad -jk_0 \vec{n}_4 \cdot \vec{r} = jk_x x - jk_y y. \quad (17)$$

Damit nun die Auswertung der Stetigkeitsbedingungen:

$$\underline{E}_z(x=0, y) : \quad + e^{+jk_y y} + \underline{r}_2 e^{-jk_y y} + \underline{r}_3 e^{+jk_y y} + \underline{r}_4 e^{-jk_y y} = 0 \quad (18)$$

$$\underline{E}_z(x, y=0) : \quad + e^{-jk_x x} + \underline{r}_2 e^{-jk_x x} + \underline{r}_3 e^{+jk_x x} + \underline{r}_4 e^{+jk_x x} = 0 \quad (19)$$

Da die Stetigkeitsbedingungen für alle  $y$  erfüllt sein müssen folgt aus (18):

$$(1 + \underline{r}_3) e^{+jk_y y} + (\underline{r}_2 + \underline{r}_4) e^{-jk_y y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r}_3 = -1 \quad \text{und} \quad \underline{r}_2 = -\underline{r}_4. \quad (20)$$

Aus (19) folgt analog:

$$(1 + \underline{r}_2) e^{-jk_x x} + (\underline{r}_3 + \underline{r}_4) e^{+jk_x x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{r}_2 = -1 \quad \text{und} \quad \underline{r}_4 = 1. \quad (21)$$

Die gesuchte elektrische Feldkomponente  $\underline{E}_z$  lautet also:

$$\begin{aligned} \underline{E}_z(x, y) &= \underline{E}_0 \left( e^{-jk_x x + jk_y y} - e^{-jk_x x - jk_y y} - e^{+jk_x x + jk_y y} + e^{+jk_x x - jk_y y} \right) \\ &= \underline{E}_0 \left( (e^{-jk_x x} - e^{jk_x x}) (e^{+jk_y y} - e^{-jk_y y}) \right) \\ &= \underline{E}_0 (-2j \sin(k_x x)) (2j \sin(k_y y)) = 4 \underline{E}_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y). \end{aligned} \quad (22)$$

Für das magnetische Feld kann man die gefundenen Faktoren oben einsetzen oder (einfacher)

das Induktionsgesetz anwenden:

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{-j\omega\mu} \text{rot} \underline{\vec{E}} = \frac{1}{-j\omega\mu} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \underline{E}_z \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$= \frac{1}{-j\omega\mu} \left( \vec{e}_x \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x} \right)$$

$$\underline{H}_x = -\frac{4\underline{E}_0}{j\omega\mu} k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) \quad (24)$$

$$\underline{H}_y = \frac{4\underline{E}_0}{j\omega\mu} k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y). \quad (25)$$

2. Geben Sie den komplexen Poyntingschen Vektor an. In welche Richtung fließt im zeitlichen Mittel Energie? Deuten Sie dieses Ergebnis.

Der komplexen Poyntingsche Vektor berechnet sich zu

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} (\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \underline{E}_z \\ \underline{H}_x^* & \underline{H}_y^* & 0 \end{vmatrix}$$

$$\underline{S}_x = -\frac{1}{2} \underline{E}_z \underline{H}_y^* = \frac{8|\underline{E}_0|^2}{j\omega\mu} k_x \sin(k_x x) \cos(k_x x) \sin^2(k_y y) \quad (26)$$

$$\underline{S}_y = \frac{1}{2} \underline{E}_z \underline{H}_x^* = \frac{8|\underline{E}_0|^2}{j\omega\mu} k_y \sin^2(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_y y) \quad (27)$$

Beide Komponenten von  $\underline{\vec{S}}$  sind rein imaginär: Im zeitlichen Mittel (Realteil des komplexen Poyntingschen Vektors) fließt also keine elektromagnetische Energie! Die berechneten Felder beschreiben eine stehende Welle.

3. Geben Sie (u.a. in Abhängigkeit der Kreisfrequenz  $\omega$ ) Koordinaten  $a$  und  $b$  an, so dass bei  $x = -a$  und  $y = b$  metallische Wände eingebracht werden können, ohne das Feld für  $-a < x < 0$  und  $0 < y < b$  zu ändern. Was für eine Anordnung liegt nun vor?

Für eine metallische Wand bei  $x = -a$  bzw.  $y = b$  muss die tangentielle elektrische Feldstärke (jeweils  $\underline{E}_z(x, y)$ ) zu Null werden, dies gilt für:

$$k_x a = m\pi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m\pi}{k_0 \sin \varphi} = \frac{m\pi c_0}{\omega \sin \varphi} \quad (28)$$

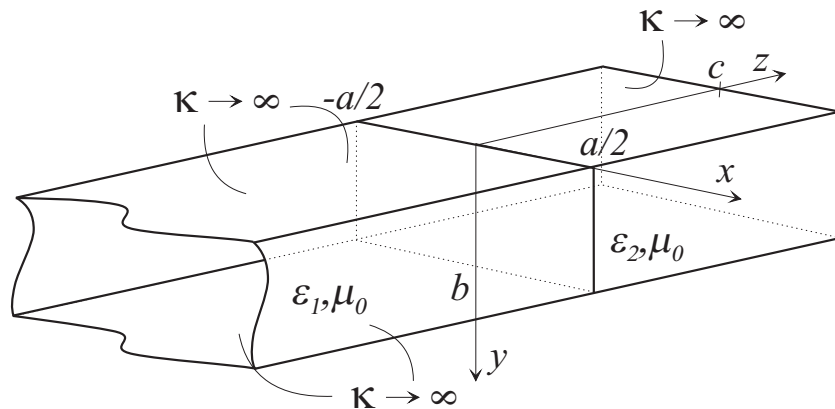
$$k_y b = n\pi \quad \Rightarrow \quad b = \frac{n\pi}{k_0 \cos \varphi} = \frac{n\pi c_0}{\omega \cos \varphi} \quad (29)$$

mit natürlichen Zahlen  $m, n$ .

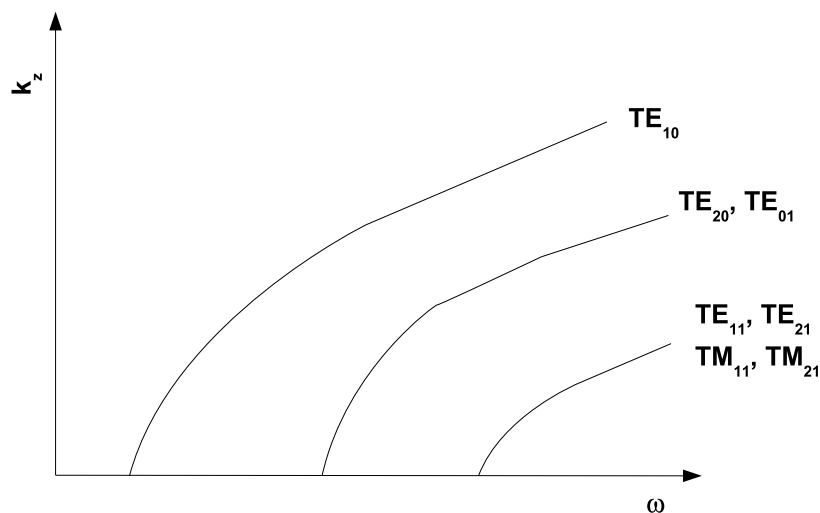
Es liegt also ein Resonator vor: Wären (in einer Umkehrung der Herleitung) die Ordnungszahlen  $m, n$  und die Abmessungen  $a, b$  vorgegeben, so könnte jeweils ein Einfallswinkel  $\varphi$  gefunden werden, so dass beide Gleichungen mit der Resonanzfrequenz  $\omega_{mn0}$  des entsprechenden Schwingungsmodes  $\text{TM}_{z,mn0}$  erfüllt sind.

Nr.	Punkte

Gegeben ist ein idealer Hohlleiter mit den Abmessungen  $a$  und  $b = a/2$  in  $x$ - und  $y$ -Richtung, s. Bild. Im Bereich  $z < 0$  ist der Hohlleiter mit dem Material der Permittivität  $\epsilon_1$ , im Bereich  $z > 0$  mit dem Material der Permittivität  $\epsilon_2 > \epsilon_1$  gefüllt. Die Permeabilität der gesamten Anordnung sei  $\mu_0$ . In  $z = c > 0$  ist der Hohlleiter mit einer ideal leitenden Platte abgeschlossen.



1. Skizzieren Sie das Dispersionsdiagramm für den Wellenleiterabschnitt  $z < 0$  für die ersten fünf ausbreitungsfähigen Moden und geben Sie den jeweiligen Moden-Typ an.



2. Geben Sie die maximale Kreisfrequenz an, bis zu der nur der Grundmode im Wellenleiterabschnitt  $z < 0$  ausbreitungsfähig ist.

Die maximale Kreisfrequenz ergibt sich aus der Dispersionsbeziehung

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{mit } k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad (30)$$

und der Bedingung  $k_z = 0$  und  $b = \frac{a}{2}$  zu

$$\omega_{c,mn} = \pi \frac{c}{a} \sqrt{m^2 + (2n)^2}. \quad (31)$$



Mit  $(m, n) = (0, 1) = (2, 0)$  ergibt sich dann

$$\omega_{c,01} = \omega_{c,20} = 2\pi \frac{c}{a}. \quad (32)$$

3. Geben Sie das elektrische und magnetische Feld des Grundmodes an und skizzieren Sie die zugehörigen elektrischen Feldlinien.

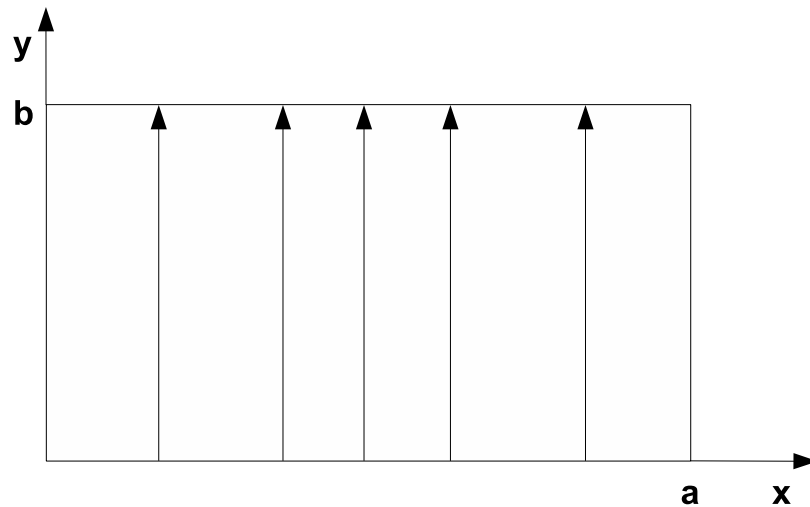
Der TE<sub>10</sub>-Mode ist der Grundmode im Rechteckhohlleiter. Das elektrische und das magnetische Feld sind durch

$$E_y = Ak_x \sin(k_x x) e^{-jk_z z} \text{ mit } k_x = \frac{\pi}{a}, k_z = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (33)$$

$$H_x = -A \frac{k_x k_z}{\omega \mu} \sin(k_x x) e^{-jk_z z} \quad (34)$$

$$H_z = -A \frac{k_x^2}{j\omega \mu} \cos(k_x x) e^{-jk_z z} \quad (35)$$

gegeben (s. Skript).



4. In  $z < 0$  wird der Grundmode mit der Amplitude  $E_0$  angeregt. Berechnen Sie das elektrische Feld innerhalb der gesamten Anordnung.

Mit den Ansätzen

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_y k_x (E_0 e^{-jk_{z,1} z} + E_{r,1} e^{jk_{z,1} z}) \sin(k_x x), z < 0 \quad (36)$$

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y k_x (E_{t,2} e^{-jk_{z,2} z} + E_{r,2} e^{jk_{z,2} z}) \sin(k_x x), z > 0 \quad (37)$$

mit

$$k_{z,1} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_1 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (38)$$

$$k_{z,2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} \quad (39)$$

$$k_x = \frac{\pi}{a} \quad (40)$$

in den jeweiligen Teilräumen und den Randbedingungen

- $E_y|_{z=c} = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_{z=0} = 0$
- $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_{z=0} = 0$

ergibt sich als Lösung für die Konstanten

$$E_{r,1} = E_0 + \frac{2E_0 \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} (1 + e^{j2k_{z,2}c})}{1 - e^{j2k_{z,2}c} - \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} (1 + e^{j2k_{z,2}c})} \quad (41)$$

$$E_{t,2} = -\frac{2E_0 e^{j2k_{z,2}c}}{1 - e^{j2k_{z,2}c} - \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} (1 + e^{j2k_{z,2}c})} \quad (42)$$

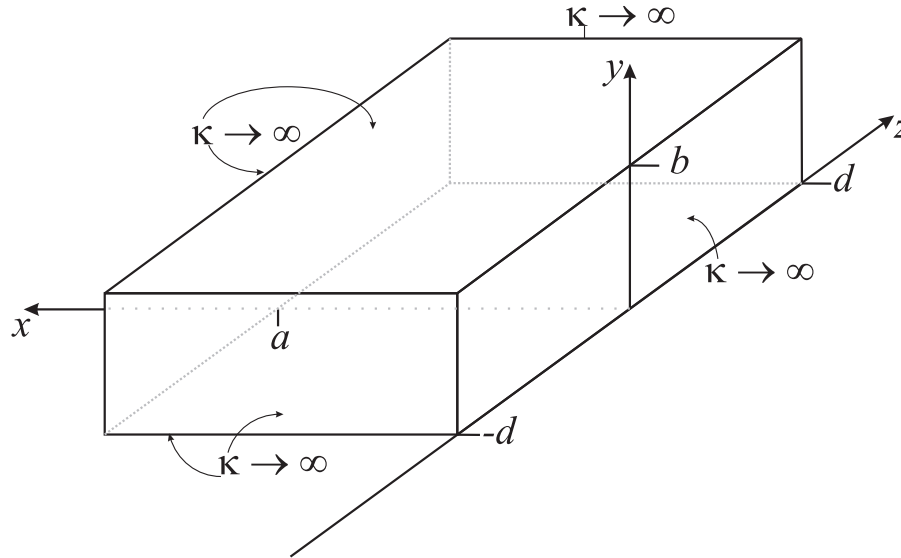
$$E_{r,2} = \frac{2E_0}{1 - e^{j2k_{z,2}c} - \frac{k_{z,2}}{k_{z,1}} (1 + e^{j2k_{z,2}c})} \quad (43)$$

5. Welche Leistung wird im zeitlichen Mittel in positiver  $z$ -Richtung transportiert ?

Im Raum  $z > 0$  resultiert eine stehende Welle, d.h. im zeitlichen Mittel wird keine Leistung transportiert.

Nr.	Punkte

Gegeben sei folgender Resonator mit ideal leitfähiger Berandung.



a) Leiten Sie die Wellengleichung für das Vektorpotential aus den Maxwell'schen Gleichungen her.

z.B.:

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (44)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \text{rot} \vec{A} \quad (45)$$

$$= \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} \quad (46)$$

$$= j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (47)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \text{rot} \vec{A} \quad (48)$$

$$\vec{E} = -j\omega \mu \text{rot} \vec{A} - \text{grad} \Phi \quad (49)$$

$$\text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \omega^2 \mu \varepsilon \vec{A} - j\omega \varepsilon \text{grad} \Phi \quad (50)$$

Lorentz-Eichung:

$$\text{div} \vec{A} = -j\omega \varepsilon \Phi \quad (51)$$

$$\Rightarrow \Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0 \quad k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \quad (52)$$

b) Geben Sie ein einkomponentiges Vektorpotential für die TM-Moden an, mit dem sich die Randbedingungen leicht erfüllen lassen.

Für TM-Moden:

$$A_z(x, y, z) = A_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z(z + d)) \quad (53)$$

c) Berechnen Sie mit ihrem Ergebnis aus b) alle elektrischen und magnetischen Feldkomponenten. Geben Sie die Separationskonstanten an.

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} \quad (54)$$

$$H_x = k_y A_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z(z + d)) \quad (55)$$

$$H_y = -k_x A_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z(z + d)) \quad (56)$$

$$H_z = 0 \quad (57)$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} k_y = \frac{n\pi}{b} k_z = \frac{l\pi}{2d} \quad (58)$$

$$E_x = \frac{-k_x k_z A_0}{j\omega\epsilon} \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z(z + d)) \quad (59)$$

$$E_y = \frac{-k_y k_z A_0}{j\omega\epsilon} \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z(z + d)) \quad (60)$$

$$E_z = \frac{(k_x^2 + k_y^2) A_0}{j\omega\epsilon} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(k_z(z + d)) \quad (61)$$

$$(62)$$

- d) Füllt man den Resonator mit (destilliertem) Wasser, verringert sich die Resonanzfrequenz um den Faktor neun. Berechnen Sie die relative Permittivität  $\epsilon_r$  von Wasser (mit Rechenweg!).

$$\epsilon_r = 81 \quad (63)$$

- e) Geben Sie die Bezeichnungen der entarteten Moden an, wenn  $a = 2b$  gilt.

$$2n = m \quad (64)$$

- f) Berechnen Sie die elektrische und die magnetische Energiedichte des  $\text{TM}_{110}$ -Modus im Resonator als Funktion der Zeit. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Elektrische und die magnetische Energiedichte des  $\text{TM}_{110}$ -Modus:

$$H_x = k_y A_0 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \cos(\omega t) \quad (65)$$

$$H_y = -k_x A_0 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t) \quad (66)$$

$$H_z = 0 \quad (67)$$

$$E_x = 0 \quad (68)$$

$$E_y = 0 \quad (69)$$

$$E_z = \frac{(k_x^2 + k_y^2) A_0}{\omega\epsilon} \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t) \quad (70)$$

$$(71)$$

$$w_{el}(t) = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{\varepsilon}{2} |\vec{E}|^2 \quad (72)$$

$$= \frac{\varepsilon (k_x^2 + k_y^2)^2 A_0^2}{\omega^2 \varepsilon^2} \sin^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \sin^2(\omega t) \quad (73)$$

$$w_{mag}(t) = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 \quad (74)$$

$$= \frac{\mu}{2} (k_y^2 A_0^2 \sin^2(k_x x) \cos^2(k_y y) \cos^2(\omega t) + k_x^2 A_0^2 \cos^2(k_x x) \sin^2(k_y y) \cos^2(\omega t)) \quad (75)$$

$$= (\dots) A_0^2 \cos^2(\omega t) \quad (76)$$

Elektrische und magnetische Energiedichte sind um  $\pi/2$  phasenverschoben.

- g) Zeigen Sie, dass die elektrische und die magnetische Energie im Resonator im zeitlichen Mittel gleich sind.

$$\overline{W_{el}} = \int_0^T \int_V w_{el}(t) dV dt = \frac{k^4 A_0^2 d}{16 \omega^2 \varepsilon} \quad (77)$$

$$\overline{W_{mag}} = \int_0^T \int_V w_{mag}(t) dV dt = \frac{\mu k^2 A_0^2 d}{16} \quad (78)$$

Zu zeigen:

$$\frac{k^4}{\omega^2 \varepsilon} = \mu k^2 \quad (79)$$

$$\frac{k^2}{\mu \varepsilon} = \omega^2 \quad (80)$$

$$k^2 c^2 = \omega^2 \quad \square \quad (81)$$

Nun werde der Resonator mit einem verlustbehafteten Material mit  $\tan \delta = 10^{-4}$  homogen gefüllt und der  $\text{TM}_{110}$ -Mode angeregt.

- h) Transformieren Sie die magnetische Feldstärke am Ort  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = 0$  und  $z = 0$  in den Zeitbereich und skizzieren Sie  $\vec{H}(t)$  qualitativ über zwei Schwingungsperioden.

**Hinweis:** Setzen Sie die Kreisfrequenz komplex an.

Magnetische Feldstärke am Ort  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = 0$  und  $z = 0$ :

$$H_x\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) = k_y A_0 \sin k_x x \cos k_y y \quad (82)$$

$$H_y\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right) = 0 \quad (83)$$

$$\underline{\omega} = \frac{k}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \quad (84)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\mu \varepsilon} \sqrt{1 - j \tan \delta}} \quad (85)$$

mit der Näherung für schwache Verluste folgt

$$\approx \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}(1 - \frac{j}{2} \tan \delta)} \quad (86)$$

$$= \underbrace{\frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}(1 - 0.25 \tan^2 \delta)}}_{\omega_r} + j \underbrace{\frac{0.5k \tan \delta}{\sqrt{\mu\varepsilon}(1 - 0.25 \tan^2 \delta)}}_{\omega_i} \quad (87)$$

$$(88)$$

$$H_x(t, \frac{a}{2}, 0, 0) = k_y A_0 \cos(\omega_r t) e^{-\omega_i t} \quad (89)$$

Qualitative Skizze:

