

UNIVERSITÄT PADERBORN

Fakultät EIM

Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik

Prof. Dr.-Ing. R. Schuhmann

Klausur TET A

LÖSUNGSVORSCHLAG

31. Juli 2008

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr.:

Prüfungsnr.:

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | HÜ | Summe |
|---------|---|---|---|---|----|-------|
| Punkte | | | | | | |

1. Allgemein gilt:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = -\vec{e}_x \frac{\partial A_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial A_x}{\partial z}. \quad (1)$$

Angewendet auf die Maxwell'schen Gleichungen folgt:

$$-\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu \vec{H} = -j\omega\mu (\vec{e}_x H_x + \vec{e}_y H_y), \quad (2)$$

$$-\vec{e}_x \frac{\partial H_y}{\partial z} + \vec{e}_y \frac{\partial H_x}{\partial z} = j\omega\varepsilon \vec{E} = j\omega\varepsilon (\vec{e}_x E_x + \vec{e}_y E_y). \quad (3)$$

Splittet man die beiden orthogonalen Polarisation auf folgt:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = j\omega\mu H_x \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = j\omega\mu \frac{\partial H_x}{\partial z} = -\omega^2 \mu \varepsilon E_y, \quad (4)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -j\omega\mu H_y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -j\omega\mu \frac{\partial H_y}{\partial z} = -\omega^2 \mu \varepsilon E_x. \quad (5)$$

Es gilt also

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon \vec{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \varepsilon + \frac{\kappa}{j\omega}}. \quad (6)$$

2. Eingesetzt ergibt sich:

$$(\vec{e}_x E_0 e^{j\Phi_0} + \vec{e}_y E_1 e^{j\Phi_1}) \left(\frac{\partial^2 e^{-jkz}}{\partial z^2} + \omega^2 \mu \varepsilon e^{-jkz} \right) = 0. \quad (7)$$

Und folglich

$$\boxed{(-jk)^2 e^{-jkz} + \omega^2 \mu \varepsilon e^{-jkz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{k}^2 = \omega^2 \mu \varepsilon}. \quad (8)$$

3.

$$\vec{E}(z, t) = \operatorname{Re} \left\{ (\vec{e}_x E_0 e^{j\Phi_0} + \vec{e}_y E_1 e^{j\Phi_1}) e^{j(\omega t - kz)} \right\} \quad (9)$$

$$\boxed{\vec{E}(z, t) = \vec{e}_x E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi_0) + \vec{e}_y E_1 \cos(\omega t - kz + \Phi_1)}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{k}{\omega\mu} (-\vec{e}_x E_1 e^{j\Phi_1} + \vec{e}_y E_0 e^{j\Phi_0}) e^{-jkz} \quad (10)$$

$$\vec{H}(z, t) = \frac{k}{\omega\mu} (-\vec{e}_x E_1 \cos(\omega t - kz + \Phi_1) + \vec{e}_y E_0 \cos(\omega t - kz + \Phi_0)) \quad (11)$$

$$\boxed{\vec{S}(z) = \vec{e}_z \frac{k}{2\omega\mu} (E_0^2 + E_1^2)} \quad (12)$$

$$\boxed{\vec{S}(z, t) = \frac{k}{\omega\mu} \vec{e}_z (E_0^2 \cos^2(\omega t - kz + \Phi_0) + E_1^2 \cos^2(\omega t - kz + \Phi_1))} \quad (13)$$

4. a.)

$$\boxed{\Phi_0 = \Phi_1} \quad (14)$$

b.)

$$\boxed{|\Phi_0 - \Phi_1| = \pi/2 \quad \text{und} \quad |E_0| = |E_1|} \quad (15)$$

5. Der Ansatz für das elektrische Feld lautet:

$$\boxed{\vec{E}_e(z) = \vec{E}_{e0} e^{-jk(z-c)} \quad \text{mit} \quad \vec{E}_{e0} = (\vec{e}_x E_0 e^{j\Phi_0} + \vec{e}_y E_1 e^{j\Phi_1})} \quad (16)$$

$$\boxed{\vec{E}_t(z) = t \vec{E}_{e0} e^{-jk(z-c)}} \quad (17)$$

$$\boxed{\vec{E}_r(z) = r \vec{E}_{e0} e^{jk(z-c)}} \quad (18)$$

Daraus abgeleitet ergibt sich das magnetische Feld:

$$\vec{H}_e(z) = \vec{H}_{e0} e^{-jk(z-c)} \quad \text{mit} \quad \vec{H}_{e0} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{e}_y E_0 e^{j\Phi_0} - \vec{e}_x E_1 e^{j\Phi_1}), \quad (19)$$

$$\vec{H}_t(z) = \vec{H}_{t0} e^{-jk(z-c)} \quad \text{mit} \quad \vec{H}_{t0} = t \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\vec{e}_y E_0 e^{j\Phi_0} - \vec{e}_x E_1 e^{j\Phi_1}), \quad (20)$$

$$\vec{H}_r(z) = \vec{H}_{r0} e^{jk(z-c)} \quad \text{mit} \quad \vec{H}_{r0} = r \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (-\vec{e}_y E_0 e^{j\Phi_0} + \vec{e}_x E_1 e^{j\Phi_1}). \quad (21)$$

Die Vorzeichen ergeben sich am Einfachsten durch Betrachtung des Poyntingvektors. Die Transmissions- und Reflexionsfaktoren, r und t , sind im Falle des senkrechten Einfalls polarisationsunabhängig.

Aus der Stetigkeit der tangentialen elektrischen Feldstärke folgt:

$$\vec{E}_{e0} + \vec{E}_{r0} = \vec{E}_{t0} \quad \Rightarrow \quad 1 + r = t. \quad (22)$$

Und aus der Stetigkeit der tangentialen magnetischen Feldstärke folgt:

$$\vec{H}_{e0} + \vec{H}_{r0} = \vec{H}_{t0} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (1 - r) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} t. \quad (23)$$

Ausgewertet ergibt sich:

$$\boxed{r = \frac{\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\underline{\varepsilon}}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\underline{\varepsilon}}}} \quad (24)$$

$$\boxed{t = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\underline{\varepsilon}}}} \quad (25)$$

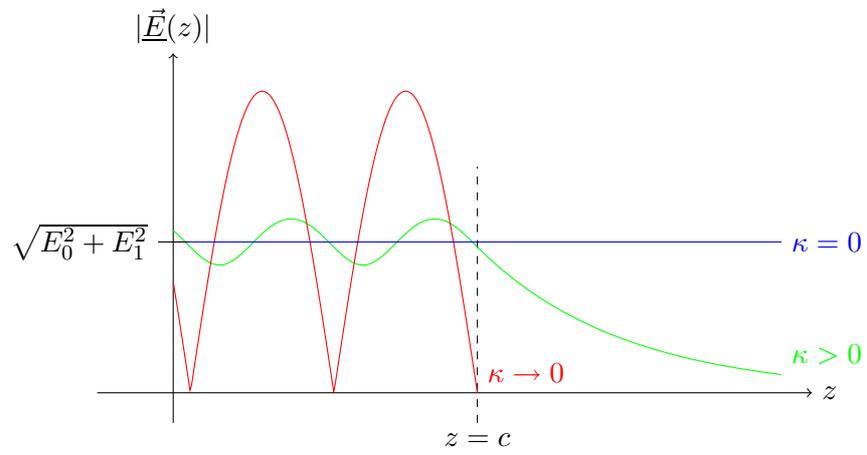
6. Für $z < c$ gilt mit $r = |r|e^{j\varphi_r}$:

$$\begin{aligned} \left| \vec{E}(z) \right| &= \left| \vec{E}_{e0} \right| \left| (e^{-jk(z-c)} + r e^{jk(z-c)}) \right| \\ &= \sqrt{E_0^2 + E_1^2} \left| 1 + |r| e^{j(2k(z-c) + \varphi_r)} \right| \\ &= \sqrt{E_0^2 + E_1^2} \sqrt{1 + |r|^2 + 2|r| \cos(2k(z-c) + \varphi_r)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Für $z > c$ gilt mit $\underline{k} = \beta - j\alpha$

$$\left| \vec{E}(z) \right| = \left| \vec{E}_{t0} \right| \left| e^{-\underline{k}(z-c)} \right| = |t| \sqrt{E_0^2 + E_1^2} e^{-\alpha(z-c)}. \quad (27)$$

Anmerkung zur Aufgabenstellung: Um die volle Punktzahl in der Klausur zu erlangen, muss lediglich qualitativ gezeichnet werden. D.h. es müssen lokale Maxima und Minima erkennbar sein, insbesondere auch Nullstellen. Desweiteren muss das oszillierende bzw. evaneszente Verhalten sowie die Einhaltung der Stetigkeitsbedingungen erkennbar sein.



| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
| | |

1. Die Tangentialkomponenten der elektrischen und magnetische Feldstärke, sowie die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke (μ =konstant) müssen stetig sein. Das elektrische Feld besitzt keine Normalkomponente.

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke folgt:

$$E_{0E}e^{-jk_{Ex}x} + E_{0R}e^{-jk_{Rx}x} = E_{0T}e^{-jk_{Ex}x} \quad (28)$$

Damit diese Gleichung für beliebige x erfüllbar ist, muss gelten:

$$k_{Ex} = k_{Rx} \quad \text{und} \quad k_{Ex} = k_{Tx} \quad (29)$$

Daraus abgeleitet folgt:

$$\boxed{k_1 \sin(\vartheta_E) = k_1 \sin(\vartheta_R) \Rightarrow \vartheta_E = \vartheta_R} \quad (30)$$

$$\boxed{k_1 \sin(\vartheta_E) = k_2 \sin(\vartheta_T) \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_1} \sin(\vartheta_E) = \sqrt{\varepsilon_2} \sin(\vartheta_T)} \quad (31)$$

2. Da $k_{Ex} = k_{Tx}$ gilt, folgt $k_{Ez} \neq k_{Tz}$. Damit ist r für beliebige Winkel ϑ_E ungleich Null. Ein Brewsterwinkel existiert für die gegebene Polarisation nicht.

Damit der Brewsterwinkel existiert, muss entweder die Polarisation gedreht werden, oder bei gleich bleibender Polarisation ein Sprung in der Permeabilität erzeugt werden. Im trivialen Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ findet ebenfalls keine Reflexion statt.

3. Damit Totalreflexion herrscht, muss ein $\vartheta_T = \frac{\pi}{2}$ mit $\vartheta_E < \frac{\pi}{2}$ existieren. Aus (31) folgt

$$\sqrt{\varepsilon_1} \sin(\vartheta_E) = \sqrt{\varepsilon_2} \sin(\pi/2) \Rightarrow \sin(\vartheta_E) = \frac{\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}} < 1 \quad (32)$$

Somit muss gelten

$$\boxed{\varepsilon_2 < \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_c = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\right)} \quad (33)$$

4. Im Fall der Totalreflexion gilt

$$\sin(\vartheta_T) > 1 \quad (34)$$

Folglich gilt

$$k_{Tz} = k_2 \cos \vartheta_T = k_2 \sqrt{1 - \sin^2(\vartheta_T)} = -jk_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\vartheta_E) - 1} \quad (35)$$

k_{Tz} ist imaginär. Das Vorzeichen wurde so gewählt, dass die Felder in positiver z -Richtung abklngen. Damit ist sofort ersichtlich, dass der Betrag des Reflexionsfaktors gleich Eins ist.

$$\boxed{r = \frac{k_{Ez} + j|k_{Tz}|}{k_{Ez} - j|k_{Tz}|}} \quad (36)$$

Für die Phase Φ_0 folgt:

$$\boxed{\Phi_0 = 2 \arctan \frac{|k_{Tz}|}{k_{Ez}} = 2 \arctan \frac{k_2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sin^2(\vartheta_E) - 1}}{k_1 \cos(\vartheta_E)}} \quad (37)$$

5. Die magnetische Feldstärke berechnet sich gemäß:

$$\vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} \left(-\vec{e}_x \frac{\partial E_y}{\partial z} + \vec{e}_z \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) \quad (38)$$

Für $z < 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{e}_y E_{E0} e^{j\Phi_0/2} \left(e^{-j(k_{Ez}z + \Phi_0/2)} + e^{+j(k_{Ez}z + \Phi_0/2)} \right) e^{-jk_{Ex}x} \\ &= \vec{e}_y E_{E0} e^{j\Phi_0/2} 2 \cos(k_{Ez}z + \Phi_0/2) e^{-jk_{Ex}x} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\vec{H}_x = \frac{-1}{j\omega\mu} E_{E0} e^{j\Phi_0/2} 2k_{Ez} \sin(k_{Ez}z + \Phi_0/2) e^{-jk_{Ex}x} \quad (40)$$

$$\vec{H}_z = \frac{k_{Ex}}{\omega\mu} E_{E0} e^{j\Phi_0/2} 2 \cos(k_{Ez}z + \Phi_0/2) e^{-jk_{Ex}x} \quad (41)$$

$$\boxed{\vec{S}_z = \frac{-2k_{Ez}}{j\omega\mu} E_{E0}^2 \cos(k_{Ez}z + \Phi_0/2) \sin(k_{Ez}z + \Phi_0/2)} \quad (42)$$

$$\boxed{\vec{S}_x = \frac{2k_{Ex}}{\omega\mu} E_{E0}^2 \cos^2(k_{Ez}z + \Phi_0/2)} \quad (43)$$

Für $z > 0$ folgt:

$$\vec{E} = \vec{e}_y E_{E0} t e^{-|k_{Tz}|z} e^{-jk_{Tx}x} \quad (44)$$

$$\vec{H} = \frac{-1}{j\omega\mu} E_{E0} t (|k_{Tz}| \vec{e}_x - jk_{Tx} \vec{e}_z) e^{-|k_{Tz}|z} e^{-jk_{Tx}x} \quad (45)$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{2\omega\mu} |tE_{E0}|^2 (j|k_{Tz}| \vec{e}_z + k_{Tx} \vec{e}_x) e^{-2|k_{Tz}|z}} \quad (46)$$

Die z -Komponente des Poyntingvektors ist in beiden Raumteilen rein imaginär. Im zeitl. Mittel wird also keine Leistung in z -Richtung transportiert. Im Raum $z > 0$ klingen die Felder mit der z -Koordinate exponentiell ab. Im Raum $z < 0$ bildet sich in z -Richtung eine stehende Welle aus. Ein Leistungsfluss findet in beiden Raumteilen nur in x -Richtung statt.

6. Gemäß (39) besitzt das elektrische Feld an den Stellen

$$\cos(k_{Ez}d + \Phi_0/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{Ez}d + \Phi_0/2 = -\pi/2 - N\pi, \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

Nullstellen, an denen eine perfekt leitende Wand eingefügt werden kann. Da $d < 0$ ist müssen rechtsseitig negative Vorzeichen gewählt werden. Es gilt damit

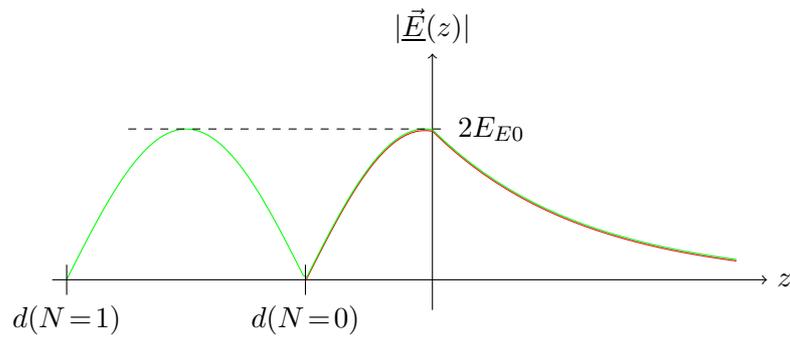
$$\boxed{d = -\frac{\pi/2 + N\pi + \Phi_0/2}{k_{Ez}}} \quad (48)$$

7. Substituiert man im Ausdruck für die elektrische Feldstärke die Phase Φ_0 erhält man

$$|\vec{E}| = E_{E0} 2 |\cos(k_{Ez}z + \Phi_0/2)| = E_{E0} 2 |\sin(k_{Ez}(z - d) - N\pi)| \quad (49)$$

An der Stelle $z = 0$ gilt:

$$|\vec{E}| = E_{E0} 2 |\sin(-k_{Ez}d - N\pi)| = E_{E0} 2 |\sin(\pi/2 + \Phi_0/2)| \quad (50)$$



Das heißt die Feldstärke besitzt mindestens ein (für $N = 0$) lokales Maximum an einer Stelle $z < 0$.

Da beide Kurven der selben Feldlösung genügen, verlaufen sie entsprechend deckungsgleich.

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
| | |

1. Da der Wellenleiter aus ideal elektrisch leitfähigem Material besteht, müssen die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke auf der Berandung identisch verschwinden:

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(y=0) &= 0, & \underline{E}_y(x=0) &= 0 \\ \underline{E}_x(y=\frac{a}{2}) &= 0, & \underline{E}_y(x=a) &= 0 \end{aligned}$$

Aus diesen Bedingungen folgt:

$$\begin{aligned} \underline{C}k_y \cos(k_x x) \sin(k_y \frac{a}{2}) \exp(-jk_z z) &= 0 \\ -\underline{C}k_x \sin(k_x a) \cos(k_y y) \exp(-jk_z z) &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind nur dann nichttrivial lösbar, d.h. für $\underline{C} \neq 0$, wenn $k_x a$ bzw. $k_y \frac{a}{2}$ auf die Menge der Nullstellen der sin-Funktion eingeschränkt werden:

$$\boxed{\begin{aligned} k_x &= m \frac{\pi}{a}, & m &\in \mathbb{N} \\ k_y &= n \frac{2\pi}{a}, & n &\in \mathbb{N} \end{aligned}}$$

2. Aus der Separationsgleichung folgt mit den Separationskonstanten aus Aufgabenteil 1) und der Lichtgeschwindigkeit $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ unmittelbar der gesuchte Zusammenhang zwischen der Wellenzahl des Rechteckhohlleiters und dessen Betriebsfrequenz:

$$\boxed{k_z(\omega) = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2}$$

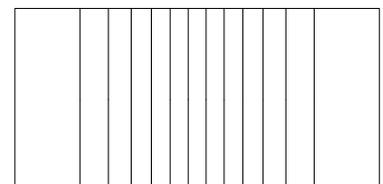
Die Grenzfrequenz gibt an, ab welcher Betriebsfrequenz ein bestimmter Wellenmode ausbreitungsfähig ist. Bedingung für eine ungedämpfte Wellenausbreitung in verlustlosen Hohlleitern ist die Reellwertigkeit der Wellenzahl. Diese Forderung kann nur für Frequenzen

$$\omega > c_0 \underbrace{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{2n\pi}{a}\right)^2}}_{:= \omega_c}$$

erfüllt werden. Mit $\omega = 2\pi f$ folgt somit für die Grenzfrequenzen der TE_{mn} -Wellen:

$$\boxed{f_c^{mn} = \frac{c_0}{2a} \sqrt{m^2 + 4n^2}}$$

3. Die TE -Grundwelle ist die TE -Welle mit der kleinsten Grenzfrequenz. Da ein TE_{00} -Mode nicht existiert, ist der Mode mit der nächsthöheren Grenzfrequenz die Welle mit den Indizes $m = 1$ und $n = 0$.

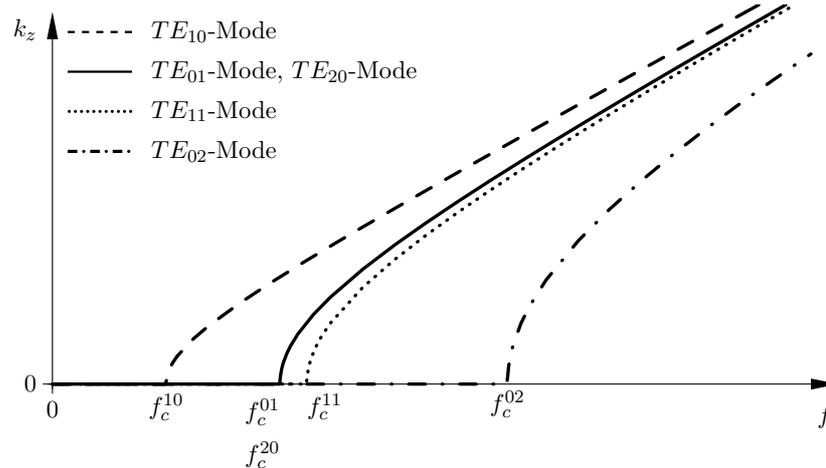


Elektrische Feldlinien des TE_{10} -Modes.

4. Für die gesuchten Grenzfrequenzen folgt:

$$f_c^{10} = \frac{1}{2} \frac{c_0}{a}, \quad f_c^{01} = \frac{c_0}{a}, \quad f_c^{11} = \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{c_0}{a}, \quad f_c^{20} = \frac{c_0}{a}, \quad f_c^{02} = 2 \frac{c_0}{a}.$$

Daraus folgt, dass $f_c^{10} < f_c^{20} = f_c^{01} < f_c^{11} < f_c^{02}$ gilt. Die grafische Darstellung von $k_z(f)$ wird als Dispersionsdiagramm bezeichnet.



Dispersionsdiagramm der ersten vier TE-Moden.

5. Die Querschnittsabmessungen des Wellenleiters müssen so gewählt werden, dass sich nur der TE-Grundmode ausbreiten kann. Das bedeutet, dass zum einen die Grenzfrequenz der TE_{10} -Welle kleiner als die untere Grenzfrequenz des zu übertragenden Signals sein muss, zum anderen müssen die Grenzfrequenzen aller höheren Wellenmoden größer als die obere Grenzfrequenz des Signals sein:

$$f_c^{10} \leq f_u \Leftrightarrow \frac{c_0}{2a} \leq f_u \Rightarrow a \geq \frac{c_0}{2f_u} = 15\text{mm}$$

$$f_c^{01} \geq f_o \Leftrightarrow \frac{c_0}{a} \geq f_o \Rightarrow a \leq \frac{c_0}{f_o} = 20\text{mm}$$

Daraus folgt als zulässiger Bereich für die Querschnittsabmessungen:

$$\boxed{15\text{mm} \leq a \leq 20\text{mm}}.$$

| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
| | |

1. Die Grundwelle in verlustlosen, längshomogenen Mehrleitersystemen mit ideal elektrisch leitfähiger Berandung ergibt sich aus der Lösung des zugehörigen statischen Randwertproblems in der Querschnittsfläche des Wellenleiters multipliziert mit dem Phasenterm $\exp(-jk_0z)$, wenn z die Koordinatenrichtung bezeichnet, in der sich die Welle ausbreitet. In dem hier vorliegenden Fall ist ein zweidimensionales elektrostatisches Randwertproblem in Zylinderkoordinaten, das durch die LAPLACE-Gleichung beschrieben ist, zu lösen. Aufgrund der Symmetrie der Anordnung besitzt das Potential nur eine Abhängigkeit in radialer Richtung, so dass sich das Problem auf die Auswertung einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert:

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\Phi}{d\varrho} \left[\varrho \frac{d\Phi}{d\varrho} \right] = 0$$

Zweimalige Integration liefert für das gesuchte elektrische Potential einen Ansatz der Form

$$\Phi(\varrho) = \Phi_0 \ln \left| \frac{\varrho_0}{\varrho} \right|$$

mit den Integrationskonstanten Φ_0 und ϱ_0 . Die elektrische Feldstärke berechnet sich zu

$$\vec{E}(\varrho) = -\vec{e}_\varrho \frac{d\Phi}{d\varrho} = \vec{e}_\varrho \Phi_0 \frac{1}{\varrho}.$$

Für den komplexen Phasor der elektrische Feldstärke folgt somit

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{e}_\varrho \underline{C} \frac{1}{\varrho} \exp(-jk_0z)$$

mit der Wellenzahl $k_0 = \frac{\omega}{c_0} = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$. Die komplexe Konstante $\underline{C} = \Phi_0 \exp(j\varphi_0)$ bestimmt sich aus der Vorgabe $\underline{E}_\varrho(\varrho = a, z = 0) = E_0$, womit schließlich folgt:

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{e}_\varrho E_0 \frac{a}{\varrho} \exp(-jk_0z).$$

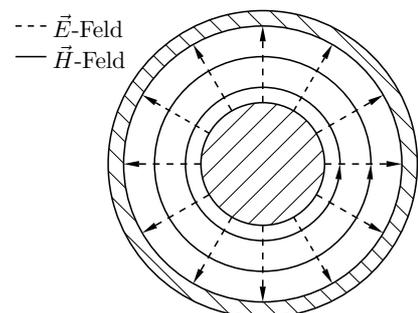
Das Induktionsgesetz $\text{rot} \underline{\vec{E}} = -j\omega\mu_0 \underline{\vec{H}}$ verknüpft die elektrische mit der magnetischen Feldstärke:

$$\underline{\vec{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \text{rot} \underline{\vec{E}} = -\frac{1}{j\omega\mu_0} \vec{e}_\varphi \frac{\partial \underline{E}}{\partial z} = \vec{e}_\varphi \frac{k_0}{\omega\mu_0} E_0 \frac{a}{\varrho} \exp(-jk_0z).$$

Mit dem Feldwellenwiderstand $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ folgt:

$$\underline{\vec{H}} = \vec{e}_\varphi \frac{E_0}{Z_0} \frac{a}{\varrho} \exp(-jk_0z).$$

2. In nebenstehender Grafik ist der Verlauf der elektrischen und magnetischen Feldlinien in der Querschnittsebene des Koaxialleiters dargestellt.



Die Grenzfrequenz der TEM-Welle beträgt $f_c = 0$.

3. Die (ortsabhängige) Spannung zwischen Innen- und Außenleiter berechnet sich aus der Integration der elektrischen Feldstärke entlang einer beliebigen Kurve in der Querschnittsebene. Um die Rechnung möglichst einfach zu halten, wird der Integrationspfad entlang der radialen Koordinate gewählt:

$$\underline{U}(z) = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_0 a \exp(-jk_0 z) \int_a^b \frac{1}{\varrho} d\varrho$$

Für die elektrische Spannung erhält man schließlich:

$$\underline{U}(z) = E_0 a \ln \left| \frac{b}{a} \right| \exp(-jk_0 z)$$

Analog berechnet sich der durch den Leiter fließende Strom durch Integration der Stromdichte über die Querschnittsfläche eines Leiters, wobei die Amplitude im Hin- und Rückleiter identisch ist. Hier bietet sich die indirekte Berechnung des Gesamtstroms unter Zuhilfenahme des Durchflutungsgesetzes in Integralform an, wobei der geschlossene Integrationsweg der Einfachheit halber entlang einer azimutalen Koordinatenlinie $\varrho = r$ gewählt wird:

$$\underline{I}(z) = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dA = \int_{\partial S} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{E_0}{Z_0} a \exp(-jk_0 z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\varphi$$

Damit folgt für den Gesamtstrom durch den Innenleiter

$$\underline{I}(z) = \frac{E_0}{Z_0} 2\pi a \exp(-jk_0 z)$$

woraus schließlich der Leitungswellenwiderstand bestimmbar ist:

$$\underline{Z}_L = \frac{Z_0}{2\pi} \ln \left| \frac{b}{a} \right|$$

4. Die zeitlich gemittelte Leistung errechnet sich durch Integration des POYNTING-Vektors über die Querschnittsfläche des Wellenleiters

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left\{ \vec{E} \times \vec{H}^* \right\} \cdot \vec{n} dA = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 a^2}{Z_0} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{1}{\varrho^2} (\vec{e}_\varrho \times \vec{e}_\varphi) \cdot \vec{e}_z \varrho d\varrho d\varphi$$

so dass als Ergebnis folgt:

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{E_0^2 a^2}{Z_0} 2\pi \ln \left| \frac{b}{a} \right| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{U} \underline{I}^* \}$$

5. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke müssen an der Stelle $z = 0$ und $z = h$ identisch verschwinden:

$$\underline{E}_\varrho(\varrho, z = 0) = \underline{E}_\varrho(\varrho, z = h) = 0$$

6. Aufgrund der Reflexion an den seitlichen Wänden können die gesuchten TEM-Eigenwellen des Resonators mittels eines Ansatzes aus hin- und zurücklaufender Welle ermittelt werden

$$\vec{E} = \vec{e}_\varrho E_0 \frac{a}{\varrho} [\exp(-jk_0 z) + \underline{r} \exp(jk_0 z)] ,$$

wobei sich der Reflexionsfaktor \underline{r} aus den Randbedingungen bestimmt:

$$\underline{E}_\varrho(\varrho, z = 0) = E_0 \frac{a}{\varrho} (1 + \underline{r}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r} = -1$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\sin(x) = \frac{\exp(jx) - \exp(-jx)}{2j}$ folgt für die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \vec{e}_\varrho \frac{2}{j} E_0 \frac{a}{\varrho} \sin(k_0 z) .$$

Die magnetische Feldstärke erhält man aus dem Induktionsgesetz:

$$\vec{H} = \vec{e}_\varphi 2 \frac{E_0 a}{Z_0 \varrho} \cos(k_0 z) .$$

7. Einarbeitung der Randbedingung an der Stelle $z = h$ liefert eine Gleichung

$$\underline{E}_\varrho(\varrho, z = h) = \frac{2}{j} E_0 \frac{a}{\varrho} \sin(k_0 h) = 0 ,$$

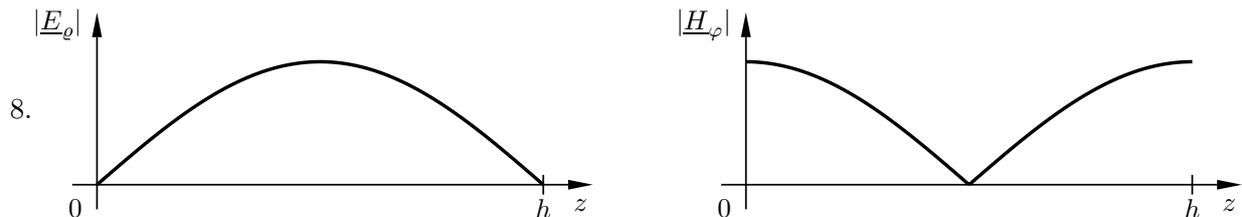
die nur für die diskreten Werte

$$k_0 = \frac{n\pi}{h} , \quad n = 1, 2, \dots$$

der Wellenzahl erfüllt sein kann. Folglich können auch die Eigenfrequenzen und die Wellenlängen der Eigenmoden nur diskrete Werte annehmen. Mit $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c_0}$ folgt

$$f = \frac{c_0 n}{2 h} , \quad \lambda = \frac{2h}{n} , \quad n = 1, 2, \dots$$

Zu beachten ist, dass für $n = 0$ eine triviale Nulllösung resultiert, die auszuschließen ist.



| Nr. | Punkte |
|-----|--------|
| | |