Name: Matrikel-Nr.:

Prof. Dr. Henning Sprekeler

Endklausur

Berlin, 26. Juli, 2018

Allgemeine Hinweise:

- Es sind keinerlei Hilfsmittel erlaubt.
- Bitte beschriften Sie jedes Blatt mit Ihrem Vor- und Nachnamen, sowie Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle 18 Blätter vorliegen haben.
- Auf den letzten Seiten befindet sich extra Platz für Ihre Lösungen. Es muss ersichtlich sein, auf welche Aufgabe Sie sich dort beziehen.
- Bei Bedarf können Sie zusätzliche leere Blätter von uns bekommen (Name und Matrikelnummer nicht vergessen!).
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift, radierbaren Stiften oder Rotstift und benutzen Sie **kein Tipp-ex**.
- Im Folgenden enthalten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ die Null. Also $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$

Viel Erfolg!

Aufgabe	Punkte
1	/6
2	/9
3	/4
4	/9
5	/9
6	/7
7	/9
8	/8
9	/12
10	/5
11	/6
12	/8
13	/5
14	/3
Σ	/100

Bearbeitungszeit: 150 Minuten
Max. Punktzahl: 100 Punkte

Aufgabe 1. Aussagenlogik (6 Punkte)

1. Sei p falsch, q wahr und r wahr. Geben Sie den daraus folgenden Wahrheitswert folgender Aussagen an.
   a) $\neg(r \wedge q) \vee p$

   b) $(p \rightarrow q) \wedge (r \leftrightarrow q)$

2. Bestimmen Sie mittels Wahrheitstabelle, ob $(p \vee q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q)$ und q logisch äquivalent sind. Füllen Sie die Tabelle dazu vollständig aus.

p	q	
F	F	
F	W	
W	F	
W	W	

3. Zeigen Sie mit den Rechenregeln der Aussagenlogik, dass die logischen Formeln $\neg p \wedge (q \rightarrow p)$ und $\neg(p \vee q)$ logisch äquivalent sind. Verwenden Sie in jedem Schritt nur ein **einzelnes** Umformungsgesetz. Die verwendeten Umformungsgesetze müssen nicht genannt werden.
   Hinweis: Für die volle Punktzahl sind mindestens fünf Umformungsschritte erforderlich.

Aufgabe 2. Prädikatenlogik (9 Punkte)

1. Formalisieren Sie folgende Aussagen als prädikatenlogischen Ausdruck über den Mengen der Menschen M und der Tage T.
   Verwenden Sie dabei das Prädikat $p(x,t) =$ "x hat am Tag t Geburtstag ".
   a) Jeder Mensch hat Geburtstag.

   b) Es gibt Menschen, die am selben Tag Geburtstag haben.

   c) Es gibt Tage, an denen niemand Geburtstag hat.

2. Seien $p(x)$ und $r(x)$ Prädikate. Negieren Sie die folgende logische Formel und formen Sie die dabei entstandene Formel schrittweise so um, dass kein Negationszeichen mehr vor einem Ausdruck mit mehr als einem Prädikat steht:

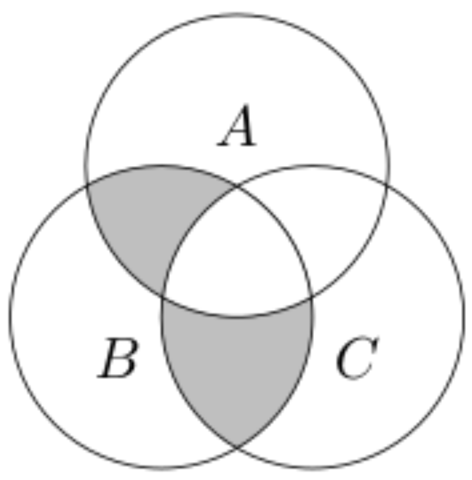
$$\exists x : \forall y : (r(x) \to \neg p(y)) \vee p(x)$$

Aufgabe 3. Mengen (4 Punkte)

1. Werten Sie folgenden Term schrittweise aus, bis keine Symbole außer $\emptyset, \{, \}, a, b$ und Kommata mehr im Term enthalten sind. $\mathcal{P}$ bezeichnet hier die Potenzmenge.

$$\Big(\mathcal{P}(\{a,\emptyset\}) \setminus \mathcal{P}(\{a\})\Big) \cap \Big(\ \{a\} \cup \{\{\emptyset\}\}\ \Big)$$

2. Betrachten Sie folgendes Venn-Diagramm der Mengen A, B und C. Drücken Sie die im Diagramm markierte Menge durch die Mengen A, B, C und die Mengenoperationen Vereingung, Schnitt, Differenz und Komplement aus ($\cup, \cap, \setminus$ und $\overline{}$).



Aufgabe 4. Relationen (9 Punkte)

Gegeben sei die Menge aller Studierenden S sowie die Relationen $R_1, R_2, R_3 \subseteq S \times S$ mit
$R_1 := \{(x, y) \mid x$ und y studieren im selben Fachsemester$\}$ und
$R_2 := \{(x, y) \mid x$ studiert in einem höheren Fachsemester als $y\}$ und
$R_3 := \{(x, y) \mid x$ studiert im selben oder in einem höheren Fachsemester als $y\}$.

1. Geben Sie in der folgenden Tabelle an, welche Eigenschaften die Relationen R_1, R_2 und R_3 erfüllen:

	reflexiv	symmetrisch	transitiv	antisymmetrisch
R_1	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐
R_2	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐
R_3	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐

2. Geben Sie in der folgenden Tabelle an, ob es sich bei den Relationen R_1, R_2 und R_3 um Äquivalenzrelationen und/oder Halbordnungen handelt:

	Äquivalenzrelation	Halbordnung
R_1	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐
R_2	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐
R_3	Ja☐ Nein☐	Ja☐ Nein☐

Aufgabe 5. Sprachen & Grammatiken I (9 Punkte)

Sei $G = (\{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$ eine Grammatik mit

$$
\begin{aligned}
P = \{ \quad S &\to aSa \mid BC \\
aB &\to Ba, \\
aC &\to Ca, \\
BC &\to bc\}.
\end{aligned}
$$

1. Geben Sie für jeden Chomsky-Typ an, warum die Grammatik von diesem Typ ist oder nicht.

2. Geben Sie das **kürzeste** Wort an, welches von der Grammatik G erzeugt werden kann, das nicht mit a beginnt, aber mit a endet. Geben Sie dazu eine Ableitungsfolge an, die dieses Wort erzeugt.

3. Geben Sie die von G erzeugte Sprache als Menge an.

Aufgabe 6. Sprachen & Grammatiken II (7 Punkte)

Geben Sie eine Grammatik vom angegebenen Chomsky-Typ für die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an.
Hinweis: Es genügt, wenn Sie die Regeln angeben und die Startvariable mit S benennen. Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

1. Eine **reguläre** Grammatik für
   $L_1 := \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält nicht die Zeichenkette } aba\}$.

2. Eine **kontextfreie** Grammatik für
   $L_2 := \big\{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R \ \wedge \ (|w| \text{ ist durch 4 teilbar})\big\}$.

Aufgabe 7. Endliche Automaten (9 Punkte)

1. Geben Sie einen **deterministischen** endlichen Automaten (DFA) graphisch an, der genau folgende Sprache $\Sigma = \{0, 1\}$ akzeptiert:

$$L_1 := \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ enthält genau einmal die Zeichenkette 01}\}.$$

Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

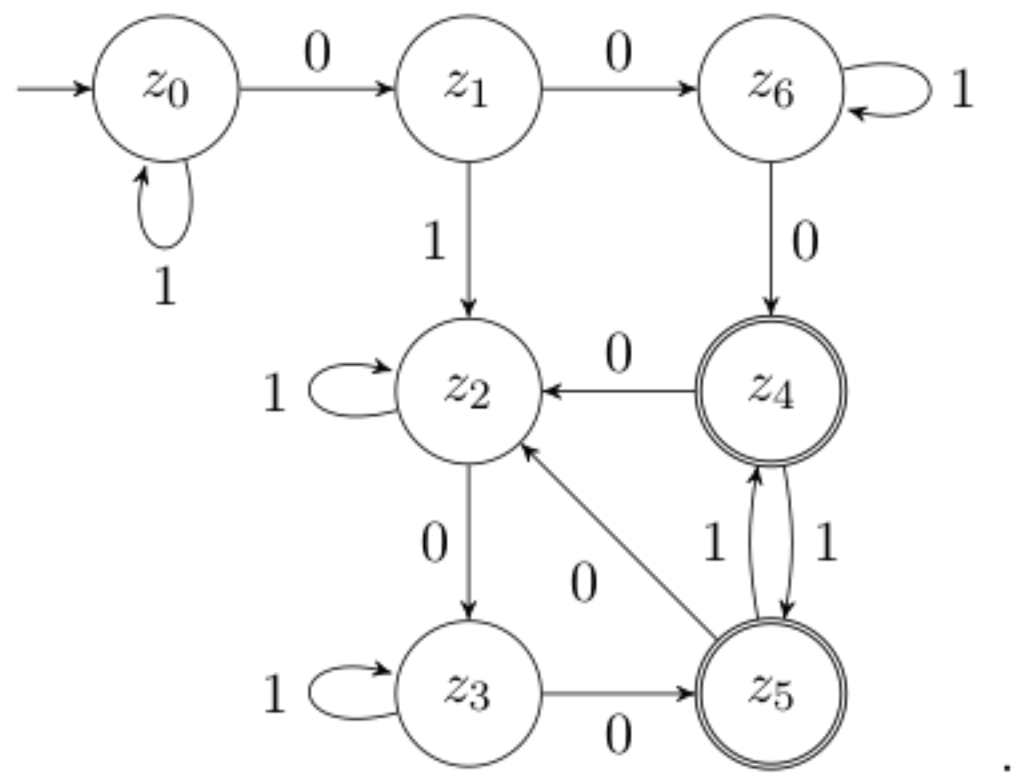
2. Geben Sie einen **nicht-deterministischen** endlichen Automaten (NFA) graphisch an, der genau folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ akzeptiert:

$$L_2 := L((b|ab)(ab|a)^*).$$

Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

Aufgabe 8. Minimierung eines Automaten (8 Punkte)

Gegeben sei der DFA $M = (\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6\}, \{0, 1\}, \delta, z_0, \{z_4, z_5\})$ mit folgender Überführungsfunktion δ:



1. Konstruieren Sie mit Hilfe des Minimierungsverfahrens für deterministische endliche Automaten einen äquivalenten minimalen DFA M'. Füllen Sie dazu folgende Tabelle aus und geben Sie die resultierenden Äquivalenzklassen an.

z_1						
z_2						
z_3						
z_4						
z_5						
z_6						
	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5

Äquivalenzklassen:

Stellen Sie den Minimalautomaten M' graphisch dar.
Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

2. Geben Sie die von dem Automaten M akzeptierte Sprache an.

Aufgabe 9. Rechtskongruenz (12 Punkte)

Wir betrachten die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L := \{bb\}^* \cup \{a\}^* .$$

Die Rechtskongruenz $R_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ über einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist definiert als

$$(x, y) \in R_L \Leftrightarrow (\forall w \in \Sigma^* : xw \in L \Leftrightarrow yw \in L).$$

1. Stellen Sie einen **deterministischen** endlichen Automaten (DFA), der genau die Sprache L akzeptiert, graphisch dar.
   Hinweis 1: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.
   Hinweis 2: Ein minimaler Automat hat fünf Zustände.

2. Zeigen Sie für drei von Ihnen frei gewählte Wörter x_1, x_2 und x_3, dass diese paarweise nicht in Relation bezüglich R_L stehen. Das heißt, zeigen Sie dass $(x_1, x_2) \notin R_L$, $(x_1, x_3) \notin R_L$ und $(x_2, x_3) \notin R_L$.

3. Geben Sie für jede Äquivalenzklasse von R_L einen Repräsentanten sowie die Menge der darin enthaltenen Wörter an.

Aufgabe 10. CYK-Algorithmus (5 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G := (V, \{a, b\}, P, S)$ mit $V := \{S, X, A, B\}$ und

$$\begin{aligned} P = \{\ & S \to AA \mid BB, \\ & A \to AS \mid a, \\ & B \to XB \mid b, \\ & X \to SB\}. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie mit dem Algorithmus von Cocke, Younger und Kasami jeweils, ob die Wörter *baabb* und *baabbb* in $L(G)$ enthalten ist. Füllen Sie dafür die folgende Tabelle vollständig aus. Geben Sie für jedes der beiden Wörter an, welche Tabelleneinträge anzeigen, ob das Wort in $L(G)$ enthalten ist oder nicht.

	b	a	a	b	b	b
1						
2						□
3					□	□
4				□	□	□
5			□	□	□	□
6		□	□	□	□	□

Aufgabe 11. Kellerautomat (6 Punkte)

Gegeben sei die Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L := \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \ \land \ n \neq m\} \,.$$

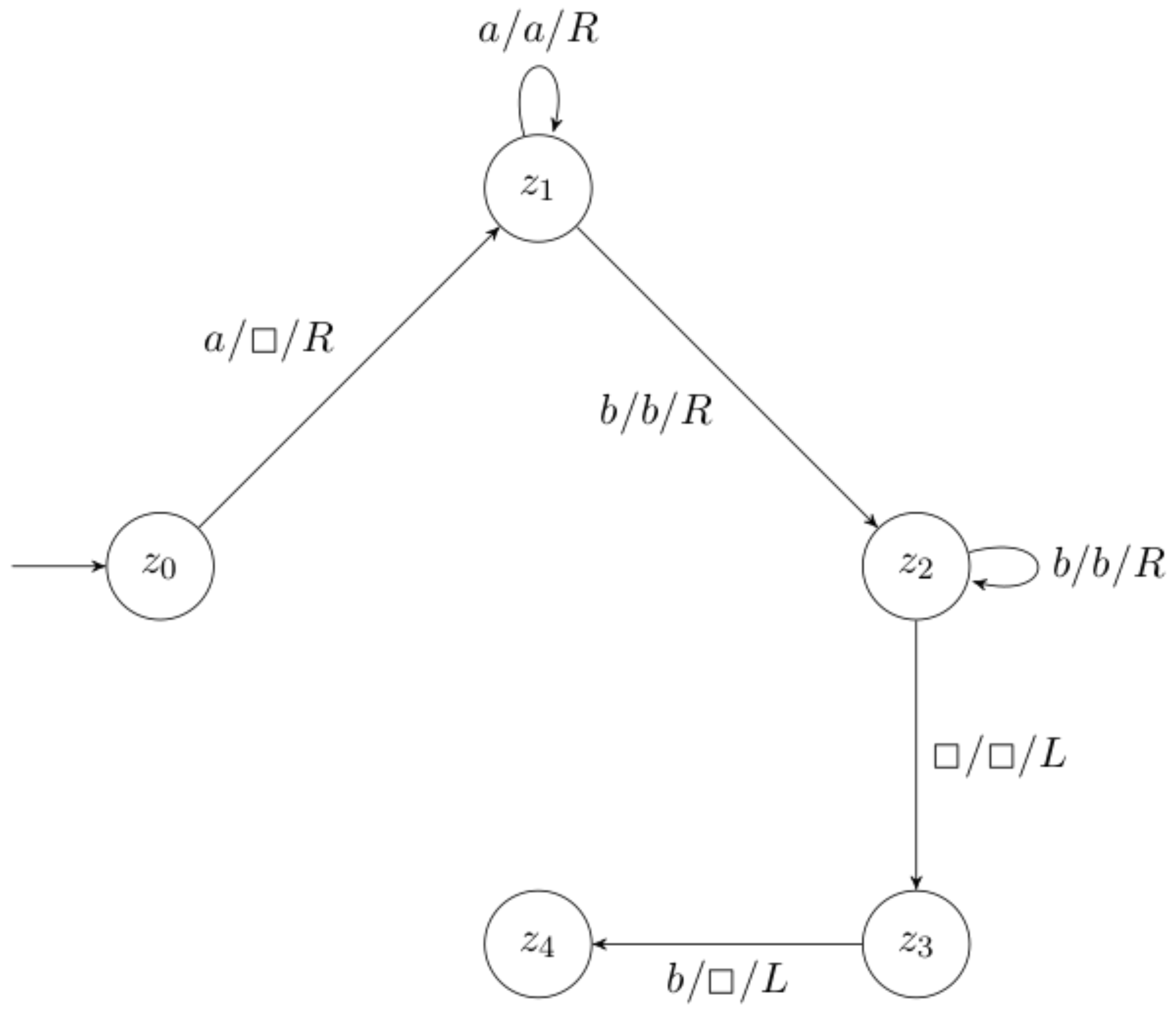
Stellen Sie einen Kellerautomaten graphisch dar, der genau die Sprache L akzeptiert.
Hinweis: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.

Geben Sie die Zustandsfolge und den Kellerinhalt Ihres Kellerautomaten unter Einlesen des Wortes $abbb$ an und begründen Sie, weshalb Ihr Automat das Wort akzeptiert.
Hinweis: Geben Sie eine Zustandsfolge auch dann an, wenn Sie wissen, dass ihr Automat nicht korrekt ist.

Restwort	$abbb$	
Zustand		
Kellerinhalt	#	

Aufgabe 12. Turingmaschinen (8 Punkte)

Betrachten Sie die Turingmaschine $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \emptyset)$ mit $Z = \{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \square\}$ und folgender Überführungsrelation δ:

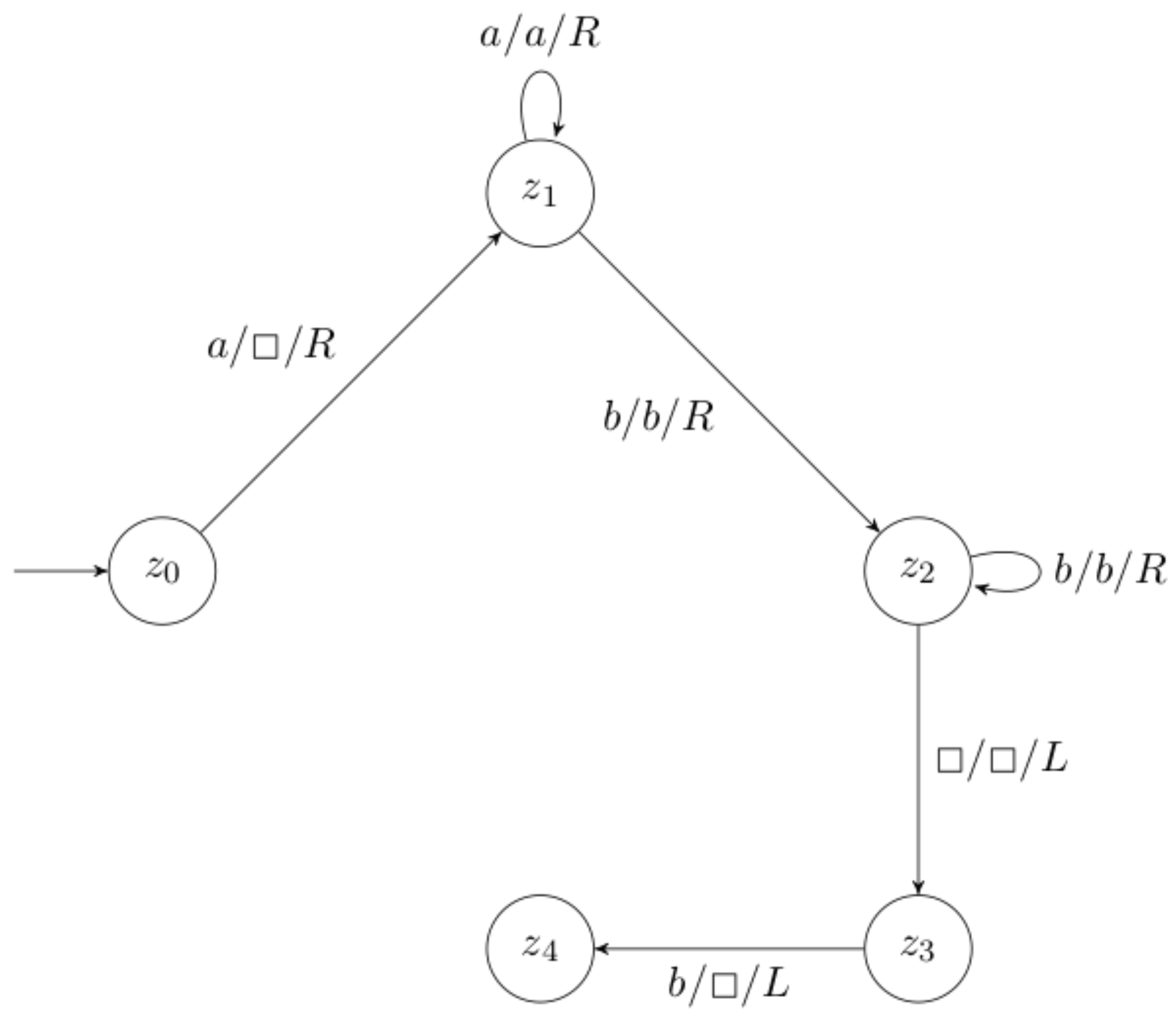


1. Geben Sie die Konfigurationsfolge obiger Turingmaschine unter Einlesen des Wortes $aaab$ an.

2. Betrachten Sie nun die folgende Sprache L über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L := \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \ \wedge \ n \neq m\}.$$

Stellen Sie eine deterministische, einbändige Turingmaschine, die genau diese Sprache akzeptiert, graphisch dar.
Hinweis 1: Nach dem Tupel ist nicht gefragt.
Hinweis 2: Sie können (müssen aber nicht) die Turingmaschine von zuvor (noch einmal unten) vervollständigen, indem Sie zusätzliche (End-)Zustände und Transitionen einfügen.
Hinweis 3: Kennzeichnen Sie eindeutig Ihre endgültige Lösung.



Aufgabe 13. Entscheidbarkeit (5 Punkte)

Bei den folgenden Fragen ist jeweils **genau eine** Antwortmöglichkeit richtig. Kreuzen Sie diese an. Für jede korrekt beantwortete Frage gibt es einen Punkt. Für falsch oder gar nicht beantwortete Fragen gibt es keinen Punkt.

1. Für die Reduzierbarkeitsrelation $\leq$ und alle Sprachen A und B gilt immer
   - ○ falls $A \leq B$, so ist A genau dann entscheidbar, wenn B entscheidbar ist.
   - ○ falls $A \leq B$, so ist A genau dann nicht-entscheidbar, wenn B entscheidbar ist.
   - ○ falls $A \leq B$ und A nicht entscheidbar, so ist auch B nicht entscheidbar.
   - ○ falls $A \leq B$, so sind weder A noch B entscheidbar.
2. Seien A und B zwei semi-entscheidbare Sprachen, dann gilt immer
   - ○ $A \cap B$ ist entscheidbar.
   - ○ $A \cap B$ ist nicht entscheidbar.
   - ○ falls $B = \overline{A}$, dann sind A und B nicht entscheidbar.
   - ○ falls $B = \overline{A}$, dann sind A und B entscheidbar.
3. Welche der folgenden Aussagen stimmt?
   - ○ Jede durch eine Grammatik erzeugbare Sprache ist semi-entscheidbar.
   - ○ Keine durch eine Grammatik erzeugbare Sprache ist semi-entscheidbar.
   - ○ Es gibt reguläre Sprachen, die nicht entscheidbar sind.
   - ○ Das Komplement einer regulären Sprache ist nicht entscheidbar.
4. Sei $\mathcal{R}$ die Menge aller Turing-berechenbaren Funktionen. Der Satz

   „Die Sprache

   $$\mathcal{C}(\mathcal{S}) \coloneqq \{w \mid \text{die von der Turingmaschine } M_w \text{ berechnete Funktion liegt in } \mathcal{S}\}$$

   ist nicht entscheidbar."

   gilt für
   - ○ alle Mengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.
   - ○ nur endlich viele Mengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.
   - ○ unendlich viele, aber nicht alle Mengen $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.
   - ○ keine Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}$.
5. Welche der folgenden Aussagen über Turingmaschinen stimmt?
   - ○ Zu jeder Turingmaschine M gibt es ein Eingabewort x, sodass M angesetzt auf x nicht hält.
   - ○ Eine Turingmaschine M_w hält niemals auf ihrer eigenen Kodierung w.
   - ○ Es gibt keine Turingmaschine M, die als Eingabe die Kodierung einer Turingmaschine M' erhält und entscheidet, ob M' angesetzt auf leerem Band hält.
   - ○ Jede Sprache L, für die eine Turingmaschine M existiert sodass $L = T(M)$, ist entscheidbar.

Aufgabe 14. Vermischtes (3 Punkte)

Bei den folgenden Fragen ist jeweils **genau eine** Antwortmöglichkeit richtig. Kreuzen Sie diese an. Für jede korrekt beantwortete Frage gibt es einen Punkt. Für falsch oder gar nicht beantwortete Fragen gibt es keinen Punkt.

1. **(Funktionen)** Seien $f : A \to B$ und $g : A \to B$ beliebige Funktionen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
   - ○ $f \circ g^{-1}$ ist eine Funktion.
   - ○ Wenn f injektiv ist, ist $f \circ g^{-1}$ eine Funktion.
   - ○ Wenn g injektiv ist, ist $f \circ g^{-1}$ eine Funktion.
   - ○ Wenn g surjektiv ist, ist $f \circ g^{-1}$ eine Funktion.
2. **(Sprachen)** Seien $A, B \subseteq \Sigma^*$ beliebige Sprachen über dem Alphabet Σ. Die Gleichheit $A^* \cup B^* = (A \cup B)^*$
   - ○ gilt im Allgemeinen.
   - ○ gilt niemals.
   - ○ gilt für $A \subseteq B$.
   - ○ gilt für $A \cap B = \emptyset$.
3. **(Reguläre Ausdrücke)** Welcher reguläre Ausdruck erzeugt genau die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \#_0(w) \text{ ist ein Vielfaches von } 3\}$?
   - ○ $\epsilon = (01010)^*$.
   - ○ $\epsilon = (1 \mid 01^*01^*0)^*$.
   - ○ $\epsilon = 1^* \mid (01^*01^*0)^*$.
   - ○ $\epsilon = (000 \mid 1)^*$.

Extra Platz.
Bitte kennzeichnen Sie eindeutig, auf welche Aufgabe sich Ihre Rechnungen beziehen.

Extra Platz.
Bitte kennzeichnen Sie eindeutig, auf welche Aufgabe sich Ihre Rechnungen beziehen.