Theoretische Grundlagen der Informatik Service

Wintersemester 2015/16
Zwischentest 04.12.2015

Mitschrift

18. Dezember 2015

Hinweis
Dies ist eine Mitschrift des Zwischentestes vom 04.12.2015.
Kein Anspruch auf Vollständig- oder Richtigkeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Logik (1.0 + 1.0 + 1.0 = 3.0 Punkte)

1. Geben Sie alle Belegungen für p, q, r und s an, für die die folgende Aussage wahr ist:

$$(\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee s) \vee (\neg r \vee s)$$

Hinweis: Sie sparen viel Zeit wenn Sie systematisch vorgehen, anstatt alle 16 Möglichkeiten in einer Wahrheitstabelle aufzuschreiben.

2. Zeigen Sie das folgende logische Aussage immer war ist:

$$p \vee (\neg p \wedge (\neg p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)$$

*Hinweis:*Anstatt eine aufwendige Wahrheitstabelle aufzustellen, empfiehlt es sich den Term schrittweise zu vereinfachen. Sie müssen dabei nicht die verwendeten Gesetze angeben, die einzelnen Schritte müssen jedoch klar ersichtlich sein.

3. Formalisieren Sie folgende Aussage als prädikatenlogischen Ausdruck über der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Verwenden Sie dabei das Prädikat $p(x, y) = x > y$ oder aus diesem Prädikat und arithmetischen Operationen abgeleitete Prädikate. Zum Beispiel $p(x+y, z) = x+y > z$.

   (a) Das Produkt zweier reeler Zahlen kann beliebig groß werden.

   (b) Wenn man eine reele Zahl (die Ausgangszahl) dir größer als 1 zu einer Potenz nimmt die kleiner ist als 1, dann erhält man etwas kleineres als die Ausgangszahl.

2 Mengen (1.0 + 1.0 = 2.0 Punkte)

1. Werten Sie den Term

$$(\{a, b\} \cup \{\{a\}, \emptyset\}) \cap (\mathcal{P}(\{a, b\}) \setminus \mathcal{P}(\{b\}))$$

schrittweise aus, bis keine Symbole außer $\emptyset, \{, \}, a, b$ und Komma mehr im Term enthalten sind. $\mathcal{P}$ bezeichnet hier die Potenzmenge.

2. Sei M eine beliebige Menge und seien $A, B, C \in M$ Teilmengen von M. Begründen Sie mithilfe eines oder mehreren Venn-Diagrammen, ob folgendes gilt:

$$(A \subseteq B) \models (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$$

3 Relationen und Funktionen (1.5 + 1.0 + 1.0 = 3.5 Punkte)

Gegeben seien die Mengen
$A := \{a, b, c, d\}$, $B := \{1, 2, 3, 4\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$,
sowie die Relationen
$R_1 \subseteq A \times A$ mit $R_1 = r(s(t(\{(a, b), (d, d), (b, c)\})))$ und
$R_2 \subseteq B \times C$ mit $R_2 = \{(1, 6), (2, 6), (3, 5), (4, 8)\}$.
Hinweis: Für eine Relation R bezeichnet $t(R)$ die transitive, $r(R)$ die reflexive, $s(R)$ die symmetrische Hülle.

1. Stellen Sie die Äquivalenzrelation R_1 grapisch dar und geben Sie alle Äquivalenzklassen sowie den Index von R_1 an.
2. Stellen Sie die Relation R_2 grapisch dar und kreuzen Sie diejendigen der folgenden Eigenschaften an, die R_2 erfüllt:
   rechtstotal □ linkstotal □ rechtseindeutig □ linkseindeutig □
3. Geben Sie eine rechtstotale Relation $S \subseteq C \times A$ an, so dass $S \circ R_2 = \{(1, c), (2, c), (4, b)\}$. Sie können die Relation grapisch oder in aufzählender Schreibweise angeben.

4 Sprachen und Grammatiken (0.5 + 0.5 + 1.5 + 2.0 = 4.5 Punkte)

Sei $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ eine Grammatik mit

$$\begin{aligned} P = \{S &\to A \mid AB \mid \lambda, \\ A &\to a \mid aA, \\ B &\to bAb\}. \end{aligned}$$

1. Geben Sie den größtmöglichen Typ der Grammatik G bezüglich der Chomsky-Hierachie an. Begründen Sie ihre Aussage.
2. Geben Sie ein Wort an, welches von der Grammatik G erzeugt werden kann, das die Länge 4 hat und mindestens ein b enthält. Geben Sie dazu eine Ableitungsfolge an, die dieses Wort erzeugt.
3. Geben Sie die von G erzeugte Sprache an
4. Geben Sie je eine Grammatik für folgende Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ an:
   (a) $L_1 := \Sigma^* \setminus \{b\}$
   (b) $L_2 := \{a^n b^m a^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

5 Automaten (0.5 + 2.0 + 0.5 = 3.0 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L := \{ucvc \mid u \in \{a, b\}^* \wedge (|u| \text{ist eine gerade Zahl}) \wedge v \in \{b, c\}^*\}$.
Hinweise: Hier bedeutet $|u|$ die Länge des Wortes u.

1. Geben Sie ein Wort der Länge 5 an, dass ein Element der Sprache L ist.
2. Geben Sie einen endlichen nichtdeterministischen Automaten (NFA) an, der genau die Sprache L akzeptiert.
3. Geben Sie eine Zustandsfolge an, die ihr NFA beim Lesen des Wortes aus Teil 1 dieser Aufgabe durchläuft und die das Wort akzeptiert.