Variationsrechnung und Optimalsteuerung

SS 16 – 6 LP Klausur
Bestanden mit 18/40 Punkten

Variationsrechnung

20 Punkte

Aufgabe 1 3 + 4 Punkte

$$\min\{J(x)\}\,,\quad J(x)=\int\limits_a^b f(t,x,\dot{x})\,\mathrm{d}t\,,\quad x(b)=x_b\,,\quad x\in\mathcal{Z}\,,\quad \text{freier linker Rand}\,.$$

1. Definition der ersten Variation angeben für $x,h\in\mathcal{Z}$ und Formel für $\delta J(x,h)$ herleiten.
2. Natürliche RB formulieren und Beweisen. Bemerkung: Es darf die Euler-DGL für den festen Rand mit Begründung verwendet werden.

Aufgabe 2 5 + 3 Punkte

$$\min\left\{\int\limits_0^2 12tx(t)-\dot{x}(t)^2\,\mathrm{d}t\right\}\,,\quad x(0)=x(2)=0\,,\quad x\in\mathcal{Z}\,.$$

1. Euler-DGL in differentieller Form sowie eine Extremale bestimmen.
2. Zeige, dass die Extremale <u>keine</u> Lösung ist. Hinweis: Höhere Optimalitätsbedingung verwenden.

Aufgabe 3 5 Punkte

Zeige, dass das Variationsproblem

$$\min\left\{\int\limits_0^1 \cos\dot{x}+\dot{x}^2-2\sin(x+e^t)\,\mathrm{d}t\right\}\,,\quad x(0)=x(1)=0\,,\quad x\in\mathcal{Z}$$

keine Lösung mit Ecken haben kann. Begründe, warum jede Lösung auf $(0,1)$ zweifach stetig differenzierbar ist.

Optimalsteuerung

20 Punkte

Aufgabe 4 3 + 2 Punkte

$$\dot{x}=Ax+Bu\,,\quad A=\begin{bmatrix}3&7\\0&5\end{bmatrix}\,,\quad B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\,,\quad \Omega\subset\mathbb{R}$$

1. Ist das System für $\Omega=\mathbb{R}$ vollständig steuerbar?
2. Begründe, warum es für $\Omega=[0,1]$ <u>nicht</u> vollständig steuerbar ist. Hinweise: 2. Komponente von x betrachten.

Aufgabe 5 4 Punkte

Formuliere das Maximumprinzip für zeitoptimale Steuerungen und linear-autonome Systeme der Form

$$\dot{x} = Ax + Bu\,, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}\,, \quad B \in \mathbb{R}^{n\times m}\,, \quad \Omega = [-1,1]^m\,.$$

Aufgabe 6 3 + 4 + 2 + 2 Punkte

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} u_1 \\ 5u_2 \end{bmatrix}\,, \quad \Omega = [-1,1]^2\,, \quad \text{Start:} \quad x_0 = (0,1)^T\,, \quad \text{Ziel:} \quad x_1 = (0,0)^T\,.$$

1. Weisen Sie nach, dass der Punkt $x_0 = (0,0)^T$ durch die Mittels $u_*(t) = (0,-1)^T$ definierte Steuerung in das Ziel x_1 gesteuert wird und bestimmen Sie die Endzeit t_*.
2. Zeigen Sie mit dem Maximumprinzip, dass u_* (aus 1.) zeitoptimal ist. Bermerkung: h aus dem Maximumprinzip ist frei wählbar.
3. Konstruieren Sie eine weitere Steuerung u mit $u(t) \neq u_*(t)$ fast überall, die x_0 ebenfalls zeitoptimal in x_1 steuert.
4. Ist das System normal?