

[illegible]

1. Aufgabe (Single Choice)

(20 Punkte)

Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. In jeder Teilaufgabe ist genau eine Antwortmöglichkeit korrekt. Markieren Sie richtige Antworten so: (☒ oder ☒). Bei Ankreuzen mehrerer Antworten zu einer Teilaufgabe gibt es keinen Punkt. Im Falle einer Korrektur füllen Sie bitte Kästchen, die nicht berücksichtigt werden sollen, vollständig aus (☐).

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?

- ☐ $|x| \geq 0$
☒ $|x + y| < |x| + |y|$
☐ $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
☐ $|x + y| \geq ||x| - |y||$

(b) Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Ungleichung $\frac{2x}{x+2} > 1$ ist gegeben durch

- ☒ $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-2, 2]$.
☐ $\mathbb{L} =]2, \infty[$.
☐ $\mathbb{L} =]-\infty, -2[$.
☐ $\mathbb{L} =]-2, \infty[$.

(c) Welche der folgenden Ansätze ist der richtige für die reelle Partialbruchzerlegung von

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{(x-1)^2(x-2)(x^2+4)}$$

mit $A, B, C, D, E \in \mathbb{R}$?

- ☒ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x^2+4}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{x^2+4}$
☐ $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{Dx}{x^2+4}$

(d) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + (-1)^n) \cdot n$

- ☒ ist divergent, aber nicht bestimmt divergent.
☐ bestimmt divergiert gegen ∞ .
☐ bestimmt divergiert gegen $-\infty$.
☐ alterniert zwischen 0 und 2.

(e) Welche der folgenden Funktionen ist injektiv?

- ☐ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2(x-1)$
☐ $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x)$
☒ $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(x)$
☐ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$

(f) Welche der folgenden Mengen ist gleich zu $M = \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) \in [\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi]\}$?

- ☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq \operatorname{Re}(z)\}$
☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq \operatorname{Re}(z)\}$
☒ $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq |\operatorname{Re}(z)|\}$
☐ $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)|\}$

Hinweis: Das Argument von z ist der Winkel zwischen z und der positiven reellen Achse (im Bogenmaß gemessen).

- (g) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(2x)$. Das Urbild von $\{-1\}$ ist gegeben durch
- ☒ $f^{-1}(\{-1\}) = \{\frac{\pi}{2} + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
 - ☐ $f^{-1}(\{-1\}) = \{\frac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
 - ☐ $f^{-1}(\{-1\}) = \{\pi + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
 - ☐ $f^{-1}(\{-1\}) = \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$
- (h) Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?
- ☒ Die Funktion f ist stetig auf ganz $\mathbb{R}$.
 - ☐ Die Funktion f ist nicht konstant.
 - ☐ Die Funktion f besitzt eine Umkehrfunktion f^{-1} .
 - ☐ Die Funktion f besitzt ein lokales Minimum.
- (i) Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbare und differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?
- ☐ $(2f(x) + 3)' = f'(x)$
 - ☐ $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$
 - ☐ $(e^x f(x))' = e^x f(x) + f'(x)$
 - ☒ $(f(x)^2)' = 2f'(x)f(x)$
- (j) Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Welche Aussage ist in jedem Fall wahr?
- ☐ f hat keine Nullstelle.
 - ☐ f besitzt mindestens einen kritischen Punkt.
 - ☒ f ist streng monoton wachsend.
 - ☐ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
- (k) Gegeben sei die auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der n -ten Ableitung $f^{(n)}(x) = (x+n)e^x$. Die Taylorentwicklung für $x \in]-1, 1[$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist

$$f(x) = x + x^2 + \frac{1}{2}x^3 + R(x)$$

mit dem Restglied $R(x)$. Wie lässt sich $R(x)$ mit einem $|\xi| < 1$ darstellen?

- ☒ $R(x) = \frac{(\xi+4)e^\xi}{4!}x^4$
 - ☐ $R(x) = \frac{(\xi+3)e^\xi}{3!}(x-\xi)^3$
 - ☐ $R(x) = \frac{(x+4)e^x}{4!}\xi^4$
 - ☐ $R(x) = \frac{(\xi+4)e^\xi}{4!}(x-\xi)^4$
- (l) Gegeben sei eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?
- ☐ Jede Stammfunktion von f ist streng monoton wachsend.
 - ☐ Jede Stammfunktion von f ist unbeschränkt.
 - ☐ Jede Stammfunktion von f besitzt eine Nullstelle.
 - ☒ Jede Stammfunktion von f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.
- (m) Gegeben seien zwei auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen $u, v: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ mit stetigen Ableitungen. Welche der folgenden Aussagen ist in jedem Fall wahr?
- ☐ $(uv)' = u'v - uv'$
 - ☒ $\int_0^1 u(x)v'(x) dx = u(1)v(1) - u(0)v(0) - \int_0^1 u'(x)v(x) dx$
 - ☐ $\int u'(x)v(x) dx = u(x)v(x) + c, c \in \mathbb{R}$
 - ☐ $(2^u)' = 2 \cdot 2^u$

- (n) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\text{Kern}(f) = \{\vec{0}\}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☒ f ist bijektiv.
☐ f ist injektiv, aber nicht surjektiv.
☐ f ist surjektiv, aber nicht injektiv.
☐ f ist weder injektiv noch surjektiv.

- (o) Gegeben sei $V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}_1$ sowie der Basis $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

- ☐ $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
☒ $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
☐ $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
☐ $\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- (p) Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $B \in \mathbb{R}^{k,n}$ mit $m > n > k$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist definiert?

- ☐ $A + B$
☐ $A + B^\top$
☐ $A \cdot B$
☒ $A \cdot B^\top$

- (q) Welche der folgenden Abbildungen ist linear?

- ☐ $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x + y \\ y + 2 \end{bmatrix}$
☐ $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto xy$
☒ $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{bmatrix} 2x \\ -x \end{bmatrix}$
☐ $f_4: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 + y \\ 3y \end{bmatrix}$

- (r) Gegeben seien $A, B \in \mathbb{K}^{n,n}$. Welche der folgenden Aussagen gilt im Allgemeinen **nicht**?

- ☐ $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$
☒ $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
☐ $\det(A^k) = \det(A)^k$
☐ $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$

- (s) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit charakteristischem Polynom

$$p_A(t) = t^3 + t^2 + 2t + 2.$$

Welcher der folgenden Werte ist ein Eigenwert von A ?

- ☐ 0
☐ 1
☐ 2
☒ -1

(t) Welche der folgenden Mengen bildet eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bzgl. des Standardskalarprodukts?

- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ i \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$
- ☒ $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- ☐ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

2. Aufgabe (Komplexe Zahlen)

(5 Punkte)

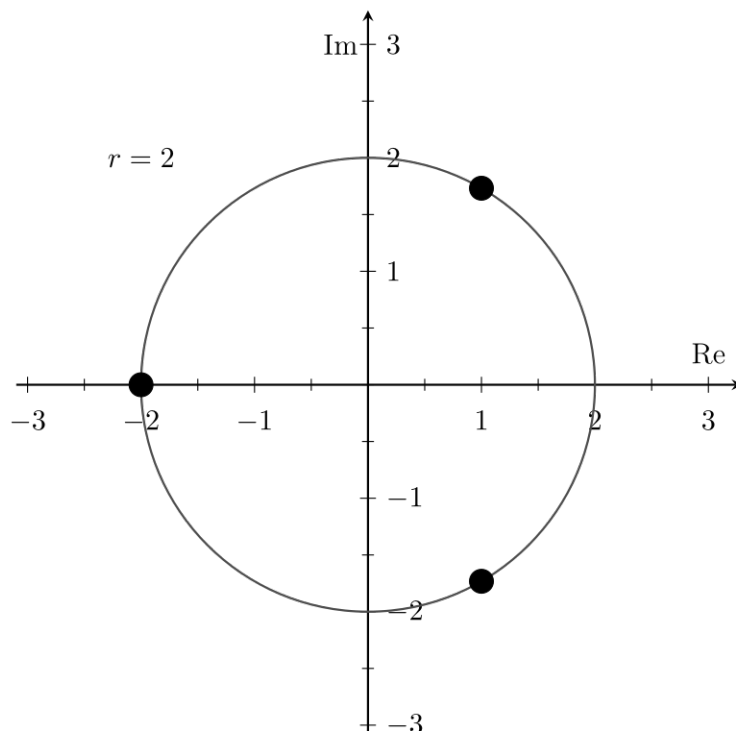
(a) Seien komplexe Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gegeben, über die Folgendes bekannt ist:

$$\left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{Im}(z_1) = -1, \quad \operatorname{Re}(z_2) = 2, \quad |z_2| = \sqrt{8}.$$

Berechnen Sie folgende Ausdrücke.

$$z_1 - \overline{z_1} = \boxed{-2i} \quad \operatorname{Re}(z_2 + iz_1) = \boxed{3} \quad |\operatorname{Re}(z_1)| = \boxed{3}$$

(b) Geben Sie die eindeutig bestimmten Parameter $n \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{Z}$ an, so dass die Gleichung $z^n = b$ die in der Abbildung als Punkte markierte Lösungsmenge besitzt.



$$n = \boxed{3} \quad b = \boxed{-8}$$

3. Aufgabe (Polynome und Rationale Funktionen)

(6 Punkte)

- (a) Gegeben sei die rationale Funktion s mit

$$s(z) = \frac{5z + 42}{z^2 - 8z + 16}.$$

Stellen Sie den Ansatz für die Partialbruchzerlegung von s auf wobei $A, B \in \mathbb{R}$.

$$s(z) = \frac{A}{\boxed{z - 4}} + \frac{B}{\boxed{(z - 4)^2}}$$

- (b) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion r mit

$$r(z) = \frac{z - 14}{(z + 4)(z - 2)}.$$

$$r(z) = \frac{\boxed{3}}{z + 4} + \frac{\boxed{-2}}{z - 2}$$

- (c) Gegeben seien die Polynome

$$p(z) = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 \quad \text{und} \quad q(z) = z^2 - 2z + 1.$$

Bestimmen Sie den Grad des Polynoms $p - q$ und berechnen Sie das Polynom $s = \frac{p}{q}$ mittels Polynomdivision.

$$\deg(p - q) = \boxed{3} \quad s(z) = \boxed{z - 1}$$

4. Aufgabe (Zahlenfolgen, Konvergenz und Grenzwert)

(7 Punkte)

- (a) Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \geq 1}$, welche durch

$$a_n = \tan((-1)^n), \quad b_n = 2^{e^{-n}}, \quad c_n = \left(1 + \frac{5}{n}\right)^n$$

definiert sind. Geben Sie jeweils den Grenzwert an, falls die Folge konvergiert und schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls der Grenzwert nicht existiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \boxed{\text{e.n.}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \boxed{= 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \quad \boxed{= e^5}$$

- (b) Gegeben sei die konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, welche rekursiv definiert ist durch

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{4}.$$

Bestimmen Sie das Folgenglied a_1 und den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$$a_1 = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \boxed{2}$$

- (c) Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte mit der Regel von Bernoulli/de l'Hospital.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln(x)} = \boxed{2} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

5. Aufgabe (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) (5 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} \cos(\pi x) + a & \text{für } x < 0, \\ \cos(\pi x) & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ \cos(\pi(x-1)) + b & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.

$$a = \boxed{1} \quad b = \boxed{-2}$$

- (b) Gegeben sei die Funktion $f(x) = (x - e)^5$. Führen Sie die erste Iteration des Bisektionsverfahrens mit den Startwerten $a_0 = 0$ und $b_0 = 4$ durch.

$$a_1 = \boxed{2} \quad b_1 = \boxed{4}$$

- (c) Gegeben sei die stetige Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \leq 0, \\ x^2 + cx & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie den reellen Parameter $c \in \mathbb{R}$, so dass f differenzierbar ist.

$$c = \boxed{1}$$

6. Aufgabe (Tangentensteigungen, Extrema und Taylorpolynome) (5 Punkte)

- (a) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 4x$. Ermitteln Sie die Steigung m der Tangente von f in $x_0 = 1$.

$$m = \boxed{2}$$

- (b) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$, welche genau ein lokales Minimum $f(x_0)$ besitzt. Ermitteln Sie die Stelle x_0 des lokalen Minimums.

$$x_0 = \boxed{4}$$

- c) Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1 + e^x)$ mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}.$$

Das Taylorpolynom $T_2(x)$ zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ist von der Form

$$T_2(x) = a + bx + cx^2.$$

Geben Sie a , b und c an.

$$a = \boxed{\ln(2)} \quad b = \boxed{\frac{1}{2}} \quad c = \boxed{\frac{1}{8}}$$

7. Aufgabe (Integration)

(6 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie das folgende Integral:

$$\int_1^2 4x^3 \, dx = \boxed{15}$$

- (b) Bestimmen Sie die eindeutige Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\int (x - 3) e^x \, dx = g(x) - \int e^x \, dx$$

gilt. *Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.*

$$g(x) = \boxed{(x - 3)e^x}$$

(c) Gegeben sei das unbestimmte Integral

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx,$$

welches mit Hilfe der Substitution $t = 1 + e^x$ gelöst werden kann. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int e^x \sqrt{1 + e^x} \, dx = a \sqrt{(1 + e^x)^n} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$a = \boxed{\frac{2}{3}} \quad n = \boxed{3}$$

(d) Bestimmen Sie den Wert der uneigentlichen Integrale, falls diese existieren. Schreiben Sie **e.n.** (*existiert nicht*), falls das Integral nicht existiert.

$$\int_0^\infty e^{-2x} \, dx = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \int_0^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \boxed{2}$$

8. Aufgabe (Fourierpolynom und Fourierreihe)

(3 Punkte)

a) Gegeben sei die 4π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Fourierpolynom vierter Ordnung ϕ_4 , welches gegeben ist durch

$$\phi_4(t) = 2 + \cos(t) - 3 \sin(t) - 2 \sin(2t).$$

Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten a_0 und b_2 von f .

$$a_0 = \boxed{4} \quad b_2 = \boxed{-3}$$

b) Gegeben seien die 2π -periodische Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\pi < t < -\frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{für } \frac{\pi}{2} < t \leq \pi \end{cases}$$

und die zugehörige Fourierreihe $S_f(t)$ mit

$$S_f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) \cos(kt).$$

Bestimmen Sie den Wert $S_f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$S_f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

9. Aufgabe (Matrizen, Vektorräume und Lineare Abbildungen) (13 Punkte)

- (a) Führen Sie den eindeutigen Schritt des Gauß-Eliminationsverfahrens durch, in welchem in folgender Matrix $A = [a_{i,j}]$ der Eintrag $a_{4,1}$ eliminiert wird.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Ergänzen Sie hierzu die fehlenden Einträge a, b .

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ \boxed{3} & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

$$a = \boxed{-5} \quad b = \boxed{-4}$$

- (b) Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

$$\text{Rang}(A) = \boxed{2} \quad \text{Rang}(B) = \boxed{2}$$

- (c) Gegeben sei eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $f\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

$$a = \boxed{6} \quad b = \boxed{4}$$

- (d) Gegeben sei ein zweidimensionaler $\mathbb{R}$ -Vektorraum V mit Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$, so dass

$$\text{id}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass $\text{id}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$a = \boxed{-3}$$

(e) Gegeben sei eine Basis $\mathcal{B}$ des $\mathbb{R}[z]_{\leq 2}$ mit

$$\mathcal{B} = \{z^2 + 2, z - 1, -2\}.$$

Bestimmen Sie das Polynom $p = az^2 + bz + c \in \mathbb{R}[z]_{\leq 2}$, welches bzgl. $\mathcal{B}$ den Koordinatenvektor

$$K_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

hat.

$$a = \boxed{1} \quad b = \boxed{2} \quad c = \boxed{4}$$

(f) Gegeben sei A mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$, so dass

$$\text{Kern}(A) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$a = \boxed{-2} \quad b = \boxed{5}$$

(g) Gegeben sei ein Teilraum $T \subseteq \mathbb{R}^{2,2}$ mit

$$T = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim T$.

$$\dim(T) = \boxed{2}$$

10. **Aufgabe (Determinante, Eigenwerte und Skalarprodukte)** (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

$$\det(A) = \boxed{-6} \quad \det(B) = \boxed{-3}$$

(b) Bestimmen Sie die Linearfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms p_A von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

$$p_A(z) = \boxed{\begin{array}{l} (1-z)(2-z)(3-z) \\ \text{oder } (-1)(z-1)(z-2)(z-3) \end{array}}$$

(c) Gegeben seien die Matrix A mit den Eigenwerten $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ und der Vektor $\vec{v}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen die geometrische Vielfachheit $g(-1)$ des Eigenwerts $\lambda_1 = -1$, sowie $b \in \mathbb{R}$, so dass $\vec{v}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_1 = -1$ ist.

$$g(-1) = \boxed{1} \quad b = \boxed{2}$$

(d) Gegeben sei das folgende Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2$$

Bestimmen Sie $x_1 \in \mathbb{R}^2$, so dass $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ orthogonal zu $\vec{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ist.

$$x_1 = \boxed{-8}$$

Bestimmen Sie $\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|$ für die von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Norm $\| \cdot \|$.

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| = \boxed{3}$$

(e) Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ mit

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ in der Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{3,3}$ und der invertierbaren Matrix $S \in \mathbb{R}^{3,3}$, so dass $A = SDS^{-1}$ gilt.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \boxed{1} \quad b = \boxed{-2}$$

(f) Gegeben sei eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3,3}$. Bestimmen Sie $\det(2Q^T Q)$.

$$\det(2Q^T Q) = \boxed{8}$$