

Lösungen zur Probeklausur (Rechenteil) Analysis I für Ingenieure

(Auf dem Aufgabenblatt ist die Punktesumme dieses Teils nicht 20. In der „echten“ Klausur werden es aber 20 sein. Die bei den Lösungen stehenden Punkte sind korrigiert, sodass sie aufsummiert 20 ergeben.)

1. Aufgabe

(4 Punkte)

IA: $a_1 = 1 = \frac{1}{1}$.

IV: Für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $a_n = \frac{1}{n}$. IB: Dann gilt $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Beweis: $a_{n+1} = a_n - \frac{1}{n(n+1)} \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

2. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $z = x + iy$, dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{(z+1)\overline{(z-1)}}{|z-1|^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{z\bar{z} - z + \bar{z} - 1}{|x+iy-1|^2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{|z|^2 - x - iy + x - iy - 1}{(x-1)^2 + y^2} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{x^2 + y^2 - 1 - 2iy}{(x^2 - 2x + 1 + y^2)} \right) \\ &= \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 - 2x + 1 + y^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) = R &\iff x^2 + y^2 - 1 = Rx^2 - 2Rx + R + Ry^2 \\ &\iff (1-R)(x^2 + y^2) + 2Rx - (R+1) = 0 \\ &\iff x^2 + \frac{2R}{1-R}x + y^2 = \frac{R+1}{1-R} \end{aligned}$$

Mit quadratischer Ergänzung ist diese Gleichung äquivalent zu

$$\left(x + \frac{R}{1-R} \right)^2 - \left(\frac{R}{1-R} \right)^2 + y^2 = \frac{R+1}{1-R}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(x + \frac{R}{1-R}\right)^2 + y^2 &= \frac{R+1}{1-R} + \left(\frac{R}{1-R}\right)^2 = \frac{R^2 + (R+1)(1-R)}{(1-R)^2} \\ &= \frac{R^2 - R^2 + 1}{(1-R)^2} = \frac{1}{(1-R)^2} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{R}{1-R}\right)^2 + y^2 &= \frac{1}{(1-R)^2} \\ \Leftrightarrow \left| \left(x + iy\right) - \left(-\frac{R}{1-R}\right) \right| &= \frac{1}{1-R} \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt einen Kreis um $\left(-\frac{R}{1-R}, 0\right)$ mit dem Radius $\frac{1}{|1-R|}$ in der x - y -Ebene.

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Die Gleichung $-\exp x = \tan x$ ist äquivalent zu $0 = \tan x + \exp x$. Die linke Seite $\tan x + \exp x$ hängt stetig von $x \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ ab. Es gilt außerdem $\tan(-\frac{\pi}{4}) + \exp(-\frac{\pi}{4}) = -1 + \exp(-\frac{\pi}{4}) < 0$ und $\tan 0 + \exp 0 = 1 > 0$. Daher existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x^* \in [-\frac{\pi}{4}, 0]$ mit $0 = \tan x^* + \exp x^*$, d.h. eine Lösung der gegebenen Gleichung.

Andererseits sind $\tan(x)$ und $\exp(x)$ und damit auch $\tan(x) + \exp(x)$ streng monoton wachsende Funktionen, also existiert nur eine solche Lösung x^* .

4. Aufgabe

(6 Punkte)

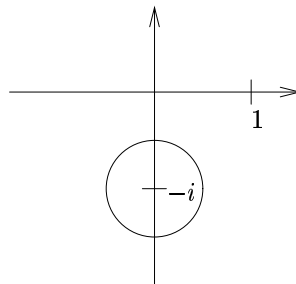
a i) Quotientenkriterium: $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3^{k+1}k^2}{3^k(k+1)^2} = 3\frac{k^2}{(k+1)^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 3 > 1$, also ist die Reihe divergent.

a ii) Es gilt $\left|\frac{17 + \sin(k+5\pi)}{k^2 + 3k + 1}\right| \leq \frac{18}{k^2}$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert die gegebene Reihe nach dem Vergleichskriterium.

b) Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ existiert, ist dieser Grenzwert der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$.

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{2^k \cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}{2^{k+1} \cos\left(\frac{1}{k}\right)}\right| = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{k+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{k}\right)}\right| = \frac{1}{2}.$$

Damit ist der Konvergenzbereich der Potenzreihe ein Kreis um $-i$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$. Skizze:



Lösungen zur Probeklausur (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

1. Aufgabe

(5 Punkte)

- a) Die Reihe konvergiert (absolut) für $z \in \mathbb{C}$, falls $|z - 1| < 3$ ist, und sie divergiert, falls $|z - 1| > 3$ ist. Für $|z - 1| = 3$ lässt sich ohne weitere Information keine Aussage machen.
- b) Ja, denn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (3 - 1)^n$ und für $z = 3$ ist $|z - 1| < 3$ (siehe a)).
- c) Für $|z - 1| \neq 3$ bleibt die Aussage von a) erhalten. Nur im Fall $|z - 1| = 3$ gilt jetzt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - 1)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| 3^n$. Also ist die Potenzreihe für $|z - 1| = 3$ sogar absolut konvergent.

2. Aufgabe

(5 Punkte)

- a) Aus der Aufgabenstellung folgt $a_0 = 1$. Nach dem Satz von Pythagoras gilt für $n > 0$: $a_n = \sqrt{\left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{n-1}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{n-1}$.
- b) Das heißt für den Flächeninhalt A_n des n -ten Quadrats gilt $A_n = a_n^2 = \frac{1}{2} a_{n-1}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Die Summe aller Flächeninhalte ist $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ (mit der Formel für den Grenzwert der geometrischen Reihe).

3. Aufgabe

(5 Punkte)

- a) Das Polynom p kann nach dem Fundamentalsatz der Algebra maximal 5 Nullstellen besitzen. Zum Beispiel besitzt $p(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ genau 5 Nullstellen.
- b) Bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten ist mit z_0 auch immer \bar{z}_0 eine Nullstelle. Wenn z_0 nicht reell ist, dann ist \bar{z}_0 eine weitere Nullstelle. Also muss p mindestens eine reelle Nullstelle besitzen, da sonst die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) gerade und gleich 5 wäre, was natürlich nicht geht. Zum Beispiel besitzt $p(x) = x(x-i)^2(x+i)^2$ genau eine reelle Nullstelle.

- c) Mit i ist dann auch $\bar{i} = -i$ eine doppelte Nullstelle. Aus b) wissen wir, dass es noch eine reelle Nullstelle gibt. Mit Vielfachheit ergibt das 5 Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt). Nach dem Fundamentalsatz der Algebra besitzt p genau 5 Nullstellen, d.h. p besitzt 3 verschiedene Nullstellen.

4. Aufgabe

(5 Punkte)

- a) Stimmt!
- b) Falsch. Gegenbeispiel: Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.
- c) (Hier sollte „monotone“ anstelle von „motone“ stehen.) Falsch. Gegenbeispiel: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.
- d) Stimmt!
- e) Falsch. Für $q = 1$ ist $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^{\infty} 1$ nicht konvergent.