TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 00/01
Fachbereich 3 - Mathematik Stand: 20. Februar 2001
Ferus / Krumke / Hauser
Becherer / Herrmann / Peters

Lösungen zur Klausur (Rechenteil)
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Mit partieller Integration:
$\int_1^2 x^7 \ln x \, dx = [\frac{1}{8}x^8 \ln x]_1^2 - \frac{1}{8}\int_1^2 x^7 \, dx$
$= \frac{1}{8}(2^8 \ln 2 - 1^8 \ln 1) - \frac{1}{64}(2^8 - 1) = 32 \ln 2 - 4 + \frac{1}{64} = 32 \ln 2 - \frac{255}{64}$

b) Mittels Polynomdivision und anschließender Partialbruchzerlegung:
$\int_5^6 \frac{x^3-7x}{x^2+x-6} = \int_5^6 x - 1 \, dx - \int_5^6 \frac{6}{(x-2)(x+3)} \, dx = [x^2/2 - x]_5^6 - \frac{6}{5}\int_5^6 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} \, dx$
$= [x^2/2 - x - \frac{6}{5}\ln(x-2) + \frac{6}{5}\ln(x+3)]_5^6$
$= 9/2 + \frac{6}{5}(\ln 9 - \ln 8 - \ln 4 + \ln 3)$

c) Mit den Substitutionen $u = \sin x$ und $t = u^2$ (man kann natürlich auch gleich $t = \sin^2 x$ substituieren!):
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x \, e^{\sin^2 x}) \cos x \, dx = \int_0^1 u \, e^{(u^2)} \, du = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t \, dt = \frac{1}{2}(e-1)$

2. Aufgabe (3 Punkte)

$2z - iz^2 + z^3 = 0$ kann höchstens 3 Lösungen haben. Man sieht sofort, daß

$$z_0 = 0$$

eine Lösung ist. Die übrigen Lösungen von

$$2z - iz^2 + z^3 = z(2 - iz + z^2) = 0$$

sind gegeben durch die Gleichung $2 - iz + z^2 = 0$. Die Mitternachtsformel liefert

$$z_1 = \frac{i}{2} + \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2 - 2} = \frac{i}{2} - \frac{3i}{2} = -i$$

und

$$z_2 = \frac{i}{2} - \sqrt{\left(\frac{i}{2}\right)^2 - 2} = \frac{i}{2} + \frac{3i}{2} = 2i\,.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Behauptung: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0 \qquad$ für $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang ($n = 0$): Aus $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$ folgt $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0$

Beweis(der Induktionsbehauptung) Es gilt (wobei wir in der 1. Gleichung l'Hospital verwenden und in der 3. Gleichung die Induktionsvoraussetzung)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(n+1)x^n}{e^x} = (n+1) \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\text{(IV)}}{=} 0\,.$$

Also haben wir die Behauptung mit vollständiger Induktion bewiesen.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Wir berechnen die Ableitungen von y an der Stelle $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= x + \sin^2 y(x) \\
&\Rightarrow \quad y'(1) = 2 \\
y''(x) &= 1 + 2\sin y(x) \cos y(x) y'(x) = 1 + \sin(2y(x))\, y'(x) \\
&\Rightarrow \quad y''(1) = 1 \\
y'''(x) &= 2y'(x)\cos(2y(x))\, y'(x) + \sin(2y(x))\, y''(x) \\
&\Rightarrow \quad y'''(1) = -8
\end{aligned}$$

Das Taylorpolynom 3.Grades von y an der Stelle $x_0 = 1$ ist also

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{y^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k \\
&= \frac{\pi}{2} + 2(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{4}{3}(x-1)^3\,.
\end{aligned}$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 00/01
Fachbereich 3 - Mathematik Stand: 20. Februar 2001
Ferus / Krumke / Hauser
Becherer / Herrmann / Peters

Lösungen zur Klausur vom 19.2.2001 (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Wir definieren $f(x) := (\cos x)e^x - \sin x$. Die Lösungen der Gleichung sind dann die Nullstellen von f. Nach den Rechenregeln für stetige Funktionen ist f eine stetige Funktion, weil exp, sin und cos stetige Funktionen sind.

a) Es gilt

$$\begin{aligned} f(0) &= (\cos 0)e^0 - \sin 0 = 1 - 0 = 1 > 0 \\ f(3\pi) &= (\cos 3\pi)e^{3\pi} - \sin 3\pi = -e^{3\pi} - 0 < 0\,. \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss die stetige Funktion f also den Wert 0 mindestens einmal auf dem Intervall $[0, 3\pi]$ annehmen.

b) Wir haben an den weiteren Stellen π und 2π im Intervall $[0, 3\pi]$ die Funktionswerte

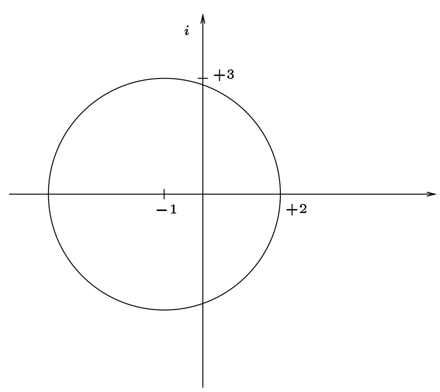
$$\begin{aligned} f(\pi) &= (\cos \pi)e^{\pi} - \sin \pi = -e^{\pi} - 0 < 0 \\ f(2\pi) &= (\cos 2\pi)e^{2\pi} - \sin 2\pi = e^{2\pi} - 0 > 0 \end{aligned}$$

Nach dem Zwischenwertsatz muss f also in jedem der Intervalle $]0, \pi[$, $]\pi, 2\pi[$ und $]2\pi, 3\pi[$ eine Nullstelle haben. Damit gibt es mehr als eine Nullstelle von f und daher auch mehr als eine Lösung der Gleichung in dem Intervall $[0, 3\pi]$!

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Falls der Limes existiert, so ist er gleich dem Konvergenzradius R; hier also gleich 3.

b) Die Potenzreihe konvergiert in jedem Fall im Inneren des Kreises



c) Das Intervall $]-2,0[$ liegt innerhalb des Konvergenzbereiches der Potenzreihe, so dass die Reihe dort wirklich eine Funktion $f :]-2,0[\to \mathbb{R}$ definiert.

Innerhalb ihres Konvergenzradius sind Potenzreihen differenzierbar und die Ableitung lässt sich als gliedweise abgeleitete Reihe schreiben. Also gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x+1)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x+1)^k\,, \quad x \in]-2,0[\,.$$

Damit haben wir f' als Potenzreihe (um -1) geschrieben und die Taylorreihe (um -1) einer Potenzreihe (um -1) ist die Potenzreihe selbst.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Für $x > 0$ ist x^x definiert als $\exp(x \ln x)$. Also gilt

$$f'(x) = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x}(x\ln x)' = e^{x\ln x}(1\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)\,,$$

wobei in der 2. Gleichung die Kettenregel und in der 3. Gleichung die Produktregel verwendet wurde.

4. Aufgabe (6 Punkte)

a) Falsch! Gegenbeispiel: Die Folge $a_n := 5 + (-1)^n$ springt immer zwischen 4 und 6 hin und her, erfüllt also $|a_n - 5| \leq 1$. Die Folge konvergiert aber nicht.

b) Falsch! Gegenbeispiel: Die harmonische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ divergiert, obwohl die Reihenglieder gegen Null konvergieren.

c) Falsch! Gegenbeispiel: $c_n = 1/n$ (oder auch konstant gleich Null) und

$$f(x) := \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x \geq 0 \end{cases} \,.$$

Dann gilt $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} f(c_n) = 1$. Aber es gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(-1/n) = 0 \neq 1 = f(0) = \lim_{n\to\infty} f(1/n)\,.$$

- der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ existiert also nicht, insbesondere ist er nicht gleich $f(0)$. Also ist f nicht stetig an der Stelle 0.