TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN — WS 00/01
Fachbereich 3 - Mathematik — Stand: 11. April 2001
Ferus / Krumke / Hauser
Becherer / Herrmann / Peters

Lösungen zur Klausur vom 11.4.2001 (Rechenteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

a) Wir erweitern konjugiert komplex, schreiben die exp–Funktion in Sinus / Cosinus um und erhalten so

$$z = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} - 1}{4+7i} = \frac{(\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}) - 1)(4-7i)}{16+49}$$
$$= \frac{i(4-7i)}{65} = \frac{7}{65} + \frac{4}{65}i \implies Re(z) = \frac{7}{65},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{4}{65}.$$

b) Aus $|z^2| + |z| = 0$ folgt $|z| = 0$. Also ist $z = 0$ die einzige Lösung.

2. Aufgabe (6 Punkte)

a) Substitution $u = \sqrt{x}$ liefert

$$\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin u\,du = -2\cos 2\pi + 2\cos\pi = -4$$

b) Mittels Partialbruchzerlegung

$$\int_0^1 \frac{6}{(x+1)(x+2)}\,dx = \int_0^1 \frac{6}{(x+1)} - \frac{6}{(x+2)}\,dx$$
$$= [6\ln|x+1| - 6\ln|x+2|]_0^1 = 12\ln 2 - 6\ln 3$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Für die Ableitung von f erhält man

$$f(x) = e^{-x}\cos x, \qquad f(0) = 1,$$
$$f'(x) = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}(\cos x + \sin x), \qquad f'(0) = -1.$$

Also ist das Taylorpolynom $T_1(x) = 1 - x$.

b) Das Restglied hat die Form $f(x) - T_1(x) = R_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}x^2$, wobei ξ zwischen $x_0 = 0$ und x liegt. Für $x \in [-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ folgt also $\xi \in [-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$ und es ist

$$f''(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x) - e^{-x}(\cos x - \sin x) = 2e^{-x}\sin x.$$

Nun schätzen wir ab und erhalten

$$|R_1(x)| \leq \frac{1}{2}|2e^{-\xi}|x^2 \leq e^{\frac{1}{100}}\left(\frac{1}{100}\right)^2 \leq \frac{e}{10}\frac{1}{1000} < \frac{1}{1000}$$

für alle $x \in [-\frac{1}{100}, \frac{1}{100}]$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

a) MONOTON WACHSEND:

Induktionsanfang: $a_0 = 1 \leq 1 + 1 = 1 + \sqrt{a_0} = a_1$

Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$.

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \leq a_{n+2}$.

Beweis: $a_{n+2} = 1 + \sqrt{a_{n+1}} \overset{\text{IV}}{\geq} 1 + \sqrt{a_n} = a_{n+1}$.

b) BESCHRÄNKT DURCH 4: Induktionsanfang: $a_0 = 1 \leq 4$.

Induktionsvoraussetzung (IV): Für ein $\in \mathbb{N}$ gilt $a_n \leq 4$.

Induktionsbehauptung: $a_{n+1} \leq 4$.

Beweis: $a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} \overset{\text{IV}}{\leq} 1 + \sqrt{4} = 3 < 4$.

c) Nach a) und b) ist die Folge monoton und beschränkt. Solche Folgen sind konvergent.

Sei $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ der Grenzwert. Dann gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(1 + \sqrt{a}_n) = 1 + \sqrt{a}$$

und als Lösungen dieser Gleichung erhalten wir

$$a = 1 + \sqrt{a} \Rightarrow (a-1)^2 = a \Leftrightarrow a^2 - 3a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da alle $a_n \geq 1$ sind (wegen a)), muss für den Grenzwert a auch $a \geq 1$ gelten; also bleibt nur die Lösung

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 00/01
Fachbereich 3 - Mathematik Stand: 11. April 2001
Ferus / Krumke / Hauser
Becherer / Herrmann / Peters

Lösungen zur Klausur vom 11.4.2001 (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (3 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f als Quotient stetiger Funktionen, deren Nenner nie Null wird, stetig.
An der Stelle $x = 0$ gilt $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ (Dieser Grenzwert ist die Ableitung von $\sin(x)$ an der Stelle Null, oder man wendet die Regel von de l'Hospital an).
Damit ist f auch in Null stetig.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) Stimmt. Da $a_n \geq 0$ ist, ist die Folge $\left(\sum\limits_{n=0}^{N} a_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach oben durch $\frac{1}{100}$ beschränkt. Also ist die Reihe konvergent. D.h. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen Null.

b) Falsch. Bsp.: $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht beschränkt.

c) Falsch. Bsp.: $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist stetig und in Null nicht differenzierbar.

d) Falsch. Bsp.: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Dann ist $\lim\limits_{m\to\infty} a_n = 0$, aber $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

a) Der Ort des Objekts wird durch die Funktion $s\colon [0,10] \to \mathbb{R}$,

$$s(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t 10\tau - \tau^2 d\tau = \left[5\tau^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^t = 5t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

beschrieben.

b) Die Geschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 5$ maximal. (1. Begründung: v(t) ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen 0 und 10. 2. Begründung: $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5$, $v(5) = 25 > v(0) = v(10) = 0$, $v''(5) = -2 < 0$.)

Zum Zeitpunkt $t = 5$ befindet sich das Objekt an der Stelle $s(5) = \frac{250}{3}$.

4. Aufgabe

(4 Punkte)

a) Die Funktion f ist bereits in der Form einer Fourier–Reihe gegeben und daher ist sie selbst ihre Fourier–Reihe. (Alternative: Die Funktion f ist stückweise monoton und stetig, daher konvergiert ihre Fourier–Reihe überall gegen f.)

b) Die Funktion g ist stückweise monoton, daher konvergiert ihre Fourier–Reihe.

g ist für $x \in \mathbb{R} \setminus \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ stetig, also konvergiert die Fourier–Reihe von g in diesen Punkten gegen g.

Für $x \in \{ 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ konvergiert sie gegen $\frac{g^-(x)+g^+(x)}{2} = \frac{g^-(0)+g^+(0)}{2} = 0$.