Ü

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Penn-Karras, Bärwolff, Förster, Tröltzsch

WS 01/02
18. Februar 2002

Februar – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

6 Punkte

Begründen Sie, dass die Funktion $f(x) = 2x^2 - 1 - 2^x$ im Intervall $[0, 3]$ mindestens eine Nullstelle besitzt.
Wir berechnen die Funktionswerte an den Intervallgrenzen und erhalten $f(0) = 0 - 1 - 1 = -2 < 0$ bzw. $f(3) = 18 - 1 - 8 = 9 > 0$. Die Funktion f ist als Summe stetiger Funktionen wieder stetig im Intervall $[0, 3]$. Nach dem Zwischenwertsatz nimmt f jeden Wert zwischen -2 und 9 an also speziell den Wert 0.

2. Aufgabe

6 Punkte

Bestimmen Sie Werte von a und b so, dass eine überall stetige Funktion f entsteht.

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)\sin(x) & \text{falls} \quad x < -2 \\ ax + b & \text{falls} \quad x \in [-2, 2] \\ 2^x & \text{falls} \quad x > 2 \end{cases}$$

Die Funktionen auf den Teilintervallen sind alle stetig (Produkt bzw. Summe stetiger Funktionen). Deshalb müssen wir nur das Verhalten in den Punkten $x = -2$ und $x = 2$ untersuchen. Dazu berechnen wir die Grenzwerte:

$$\lim_{x \nearrow -2} f(x) = \lim_{x \nearrow -2} (x+2)\sin(x) = 0,$$

$$\lim_{x \searrow 2} f(x) = \lim_{x \searrow 2} 2^x = 4.$$

Wir erhalten damit das Gleichungssystem $-2a + b = 0$ und $2a + b = 4$, welches die eindeutige Lösung $a = 1$ und $b = 2$ besitzt. Für diese Werte ist die Funktion f überall stetig.

3. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremalstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 12x$ im Intervall $[-3, 1]$. Geben Sie jeweils die Art des Extremums an (lokal/global bzw. Maximum/Minimum). Begründen Sie Ihre Aussagen.
Wir berechnen die erste Ableitung von f: $f'(x) = 3x^2 - 12$. Die Gleichung $f'(0) = 0$ gilt für $x = -2$ und $x = 2$. Der Punkt $x = 2$ fällt weg, da er außerhalb des Intervalls liegt Wir berechnen nun die Funktionswerte im Punkt $x = -2$ und in den Randpunkten: $f(-3) = 9$, $f(-2) = 16$, $f(1) = -11$. Unter diesen Werten muß sich das globale Minimum und das globale Maximum befinden (Existenz klar wegen stetiger Funktion auf kompaktem Intervall). Offenbar ist daher $x = -2$ globale Maximalstelle und $x = 1$ globale Minimalstelle. Außerdem ist -3 eine lokale Minimalstelle (wegen $f'(-3) = 15 > 0$ und -3 ist linker Randpunkt).

4. Aufgabe

6 Punkte

Sind folgende Aussagen wahr oder falsch ? Begründen Sie Ihre Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) Jede stetige Funktion ist auch differenzierbar.
Falsch, die Funktion $f(x) = |x|$ ist im Punkt 0 nicht differenzierbar.
b) Jede auf $]0, 2]$ stetige Funktion nimmt in diesem Intervall ihr Minimum und ihr Maximum an.
Falsch, $f(x) = x$ nimmt kein Minimum an, da $x = 0$ nicht zum Definitionsgebiet gehört.
c) Sei a_k eine konvergente Folge und b_k eine divergente Folge. Dann ist die Folge $c_k = a_k \cdot b_k$ divergent.
Falsch, für $a_k = 0$, $b_k = k$ erhalten wir $c_k = 0$ und damit wieder eine konvergente Folge.

5. Aufgabe

7 Punkte

Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom der Funktion $y = \sin(2x)$ für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Weisen Sie nach, dass der Approximationsfehler im Intervall $[-0.1, 0.1]$ kleiner als 10^{-4} ist.
Gesucht ist das Taylorpolynom

$$T_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3.$$

Daher berechnen wir $f(0) = 0$, $f'(x) = 2\cos(2x)$, $f'(0) = 2$, $f''(x) = -4\sin(2x)$, $f''(0) = 0$, $f'''(x) = -8\cos(2x)$ und $f'''(0) = -8$. Wir erhalten

$$T_3(x) = 2x - \frac{8}{6}x^3.$$

Für das Restglied

$$R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$$

benötigen wir die vierte Ableitung von f: $f^{(4)}(x) = 16\sin(2x)$. Somit ergibt sich

$$R_3(x) = \frac{16\sin(2\xi)}{24}x^4.$$

Jetzt schätzen wir den Approximationsfehler ab:

$$|R_3(x)| \leq \frac{16 \cdot 1}{24}(0.1)^4 \leq 10^{-4}.$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Zeigen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt $\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+1}$.

Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1} \frac{3}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

Induktionsvoraussetzung: Es gibt ein $n \geq 1$ mit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+1}.$$

Induktionsbehauptung: Dann folgt $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = 1 - \frac{1}{3n+4}$.

Induktionsschritt:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{3}{(3k-2)\cdot(3k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(3k-2)\cdot(3k+1)} + \frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)}$$

$$\overset{\text{IV}}{=} 1 - \frac{1}{3n+1} + \frac{3}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = 1 - \frac{3n+4-3}{(3n+1)\cdot(3n+4)} = 1 - \frac{1}{3n+4}$$