TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 02
Fakultät II - Mathematik Stand: 11. Oktober 2002
Lutz, Gündel vom Hofe
Körner, Leschke

Lösungen zur Klausur vom 7.10..2002 (Verständnisteil) Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Die Folge der Fibonacci-Zahlen ist definiert durch

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \quad \text{für } n \geq 1.$$

Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion: $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$.

Beweis: Induktionsanfang $(n = 0)$: $\sum_{k=0}^{0} f_k = f_0 = 1 = f_2 - 1$

Induktionsschritt:
Sei die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ wahr (Induktionsvoraussetzung),
dann gilt sie auch für $n + 1$, denn

$$\sum_{k=0}^{n+1} f_k = \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right) + f_{n+1}$$
$$\underset{\substack{\text{Induktions-}\\\text{voraussetzung}}}{=} f_{n+2} - 1 + f_{n+1}$$
$$= f_{n+3} - 1$$

---

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^4 = \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = -1.$

b) Lösungen der Gleichung $z^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right)^4$ sind

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i) \ , \qquad z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \ ,$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1+i) \ , \qquad z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i)$$

Skizze :

3. Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben sei die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-i)^k$ mit Konvergenzradius $R = 1$.

a) Bild: Kreis mit Radius $R = 1$ um i.

b) Konvergenzverhalten der Potenzreihe bei

$z_0 = 2 + i$:

Die Reihe ist divergent, da z_0 außerhalb des Konvergenzkreises liegt.

$z_1 = \frac{i}{2}$:

Die Reihe ist konvergent, da z_1 innerhalb des Konvergenzkreises liegt.

$z_2 = -1 + i$:

Keine Aussage über das Konvergenzverhalten bei z_2 möglich, da z_2 auf dem Rand des Konvergenzkreises liegt.

c) $\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = R = 1$, falls der Grenzwert existiert.

---

4. Aufgabe (9 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & \text{falls } x \leq 0 \\ x & \text{falls } x > 0 \end{cases}$.

a) Für $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ist f jeweils als Komposition stetiger Funktionen stetig.

Bei $x = 0$ ist f stetig, da

$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = \lim_{x\nearrow 0}(x+2)^2 - 4 = 0$

$= \lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} x$

$= f(0)$

b) Für $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ist f jeweils als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar.

Untersuchung auf Differenzierbarkeit bei $x = 0$:

Man muss $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ auf Existenz untersuchen. $\lim_{x\nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$\lim_{x\nearrow 0} \frac{\left((x+2)^2 - 4\right) - 0}{x} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{x^2 + 2x}{x} = 2$

aber

$\lim_{x\searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$

Also exisitiert $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ nicht.

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig. Ferner sei $f(3) = 6$ und $f(6) = 3$. Dann gibt es eine Stelle $x_0 \in]3, 6[$ mit $f(x_0) = 5$.
Die Aussage ist wahr nach dem Zwischenwertsatz.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Nullfolge.
Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$.
Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$a_n = (-1)^n \dfrac{1}{n+1}$, sodass

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ divergent ist.

c) Jede injektive Funktion ist stetig.
Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 0 \\ x+1 & \text{falls } x\ 0 \end{cases}$$

ist injektiv, aber bei $x = 0$ nicht stetig.

d) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und für einen inneren Punkt $x_0 \in]0, 1[$ gelte $f'(x_0) = 0$. Dann hat f in x_0 ein lokales Extremum.
Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$$

hat einen Sattelpunkt bei $x_0 = 1/2$.