TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FAKULTÄT II - INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dozenten: Adams, Bärwolff, Förster, Plato, Tröltzsch

WS 2002/03
Stand: 20.03.03

Lösungen zur Februar-Vollklausur, Rechenteil, B
„Analysis I für Ingenieure"

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Induktionsanfang: $n = 0$: $\frac{9 \cdot 0}{4^1} = 1 - \frac{3 \cdot 0 + 4}{4^1}$ ist offensichtlich erfüllt.
Schluss von n auf $n + 1$:

Ind.vor.: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}}$

Ind.beh.: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{9k}{4^{k+1}} = 1 - \frac{3n+7}{4^{n+2}}$

Ind.bew.: $\sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{9k}{4^{k+1}} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{9k}{4^{k+1}} + \frac{9(n+1)}{4^{n+2}} \overset{\text{Ind.vor.}}{=} 1 - \frac{3n+4}{4^{n+1}} + \frac{9(n+1)}{4^{n+2}} = 1 - \frac{12n+16}{4^{n+2}} + \frac{9n+9}{4^{n+2}} = 1 - \frac{3n+7}{4^{n+2}}$

Formel gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

$\frac{2}{|x+1|} \geq \frac{1}{|x-2|}$ ist definiert für $x \neq -1$ und $x \neq 2$.
1. Fall: $x < -1$

$$2(-x + 2) \geq 1(-x - 1) \Longleftrightarrow x \leq 5, \qquad \text{folglich:} \quad L_1 = \;]-\infty, -1[$$

2. Fall: $-1 < x < 2$

$$2(-x + 2) \geq 1(x + 1) \Longleftrightarrow x \leq 1, \qquad \text{folglich:} \quad L_2 = \;]-1, 1]$$

3. Fall: $2 < x$

$$2(x - 2) \geq 1(x + 1) \Longleftrightarrow x \geq 5, \qquad \text{folglich:} \quad L_3 = \; [5, \infty[$$

Gesamtlösungsmenge: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 =]-\infty, -1[\, \cup \,]-1, 1] \, \cup \, [5, \infty[$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

$$(1 - i)z^3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}z^3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{3}{4}\pi} \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = -e^{i\pi} = 1$$

Lösungen in Polarkoordinatenform:

$$z_k = -e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3})} \quad \text{für } k = 0, 1, 2$$

und in kartesischer Form:

$$z_0 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ und $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n(n+1)\sqrt{n^2+1}}$.
Der Konvergenzradius berechnet sich durch:

$$R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}| = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+2)\sqrt{(n+1)^2+1}}{(n+1)\sqrt{n^2+1}} = 3$$

Die Randpunkte erfüllen die Gleichung: $|x-2| = 3 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{oder} \quad x = 5$
Für $x = -1$ oder $x = 5$ gilt: $|a_n(x-2)^n| = \frac{1}{(n+1)\sqrt{n^2+1}} \leq \frac{1}{n^2}$
Nach dem Vergleichskrit. ist die Potenzreihe damit für $x = -1$ und $x = 5$ absolut konvergent.
(Alternativ auch das Leibnizkriterium für $x = 5$ möglich.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) $f(x) = \ln(1-2x), \quad x_0 = 0$

$f'(x) = \frac{-2}{1-2x}$ und $f''(x) = -\frac{4}{(1-2x)^2} \implies f(0) = 0, \quad f'(0) = -2, \quad f''(0) = -4$

Damit erhält man: $T_2(x) = \frac{0}{0!}x^0 + \frac{-2}{1!}x^1 + \frac{-4}{2!}x^2 = -2x - 2x^2$

b)
$f'''(x) = -\frac{16}{(1-2x)^3} \implies R_2(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3 = -\frac{8}{3}\frac{x^3}{(1-2\xi)^3}$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

a)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx$$

Betrachte zuerst: $\int_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{a\searrow 1} \int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx \qquad (b > a > 1)$

Substitution:
$z = \sqrt{x-1} \quad \Rightarrow \quad dz = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}dx \Leftrightarrow 2\sqrt{x-1}dz = dx \Leftrightarrow 2zdz = dx$ und $x = z^2+1$

(oder $g(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{1}{2z}$)

Damit:
$\int_a^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{(z^2+1)z}2z\ dz = 2\int_{z(a)}^{z(b)} \frac{1}{z^2+1}\ dz \qquad$ (mit $z(a) = \sqrt{a-1}$ und $z(b) = \sqrt{b-1}$)

$= [2\arctan(z)]_{\sqrt{a-1}}^{\sqrt{b-1}} \qquad$ oder $= [2\arctan(\sqrt{x-1})]_a^b$

Man erhält also:

$\int\limits_1^b \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim\limits_{a \searrow 1}(2\arctan(\sqrt{b-1}) - 2\arctan(\sqrt{a-1})) = \arctan(\sqrt{b-1}) - 2\arctan(0) = \arctan(\sqrt{b-1})$

Insgesamt lautet das Ergebnis für das Ausgangsintegral also:

$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\ dx = \lim_{b\to\infty} 2\arctan(\sqrt{b-1}) = \pi$$

b)

$F(x) = \int \frac{8x-8}{x^2+4x-12}\ dx$

Nennernullstellen:

$x^2+4x-12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+12} \Rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -6$

Ansatz: $\frac{8x-8}{x^2+4x-12} = \frac{8x-8}{(x-2)(x+6)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+6}$

Koeffizientenvergleich: $8x-8 = (x+6)A + (x-2)B$

$\Rightarrow 8 = A + B$ und $-8 = 6A - 2B \Rightarrow A = 1$ und $B = 7$

$\Rightarrow \frac{8x-8}{x^2+4x-12} = \frac{1}{x-2} + \frac{7}{x+6}$

$F(x) = \ln|x-2| + 7\ln|x+6| + C$