TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2002/03
FAKULTÄT II - INSTITUT FÜR MATHEMATIK Stand: 03.04.03
Dozenten: Adams, Bärwolff, Förster, Plato, Tröltzsch

Lösungen zur April-Vollklausur, Rechenteil „Analysis I für Ingenieure“

(ohne Gewähr)

Aufgabe 1 (7 Punkte)

$|x+2| + |x-1| < 10$

1. Fall: $x \leq -2$: $\quad -x-2-x+1 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x > -\frac{11}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \left]-\frac{11}{2}, -2\right]$

2. Fall: $-2 < x < 1$: $\quad x+2-x+1 < 10$ ist immer richtig $\quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \left]-2, 1\right[$

3. Fall: $x \geq 1$: $\quad x+2+x-1 < 10 \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_3 = \left[1, \frac{9}{2}\right[$

Insgesamt erhält man somit: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left]-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right[$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Zu a) mit p-q-Formel erhält man: $\quad z_{1,2} = -i + \sqrt{-1+1+4i} = -i + 2\sqrt{i}$

Suche nach $w^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ergibt:

$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\,\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ und $w_2 = -w_1$

Damit erhält man

$$z_1 = \sqrt{2} + (\sqrt{2}-1)i \qquad \text{und} \qquad z_2 = -\sqrt{2} - (\sqrt{2}+1)i$$

Zu b)

$$\frac{1+i}{z} + \frac{20}{4+3i} = 3-i \quad \Leftrightarrow \quad (1+i) + \frac{20}{25}(4-3i)z = (3-i)z$$

$$\Leftrightarrow \quad 5(1+i) = 4(-4+3i)z - 5(3-i)z \quad \Leftrightarrow \quad 5+5i = (-1+7i)z$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{5+5i}{-1+7i} = \frac{(5+5i)(-1-7i)}{50} = \frac{3-4i}{5}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2x-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(-1)^n}{n}(x-\frac{1}{2})^n$$

ist eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt $\frac{1}{2}$ und $a_n = \frac{2^n(-1)^n}{n}$.

Der Konvergenzradius ist $R = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Also ist die Potenzreihe für $|x-\frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \in \left]0, 1\right[$ absolut konvergent.
Für $|x-\frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ ist die Potenzreihe divergent.

Auf dem Rand des Konvergenzkreises gilt $|x - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad x = 1.$

$x = 1$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergent nach Leibniz-Kriterium (nicht absolut konvergent)

$x = 0$: $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bestimmt divergent (harmonische Reihe).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Entweder:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 2\cosh(2x) - 2\sinh(2x)\\
&f''(x) = 4\sinh(2x) - 4\cosh(2x) = -4\cosh(2x) + 4\sinh(2x)\\
&f'''(x) = 8\cosh(2x) - 8\sinh(2x)\\
&\Longrightarrow \quad f^n(x) = -(-2)^n\cosh(2x) + (-2)^n\sinh(2x)
\end{aligned}$$

Oder:

$f(x) = \sinh(2x) - \cosh(2x) = \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2} = \frac{-2e^{-2x}}{2} = -e^{-2x}$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&f'(x) = 2e^{-2x}\\
&f''(x) = -4e^{-2x}\\
&f'''(x) = 8e^{-2x}\\
&\Longrightarrow \quad f^n(x) = -(-2)^n e^{-2x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^3 e^{-x^2} dx$$

Substitution: $\quad z = -x^2 \Rightarrow dz = -2xdx \quad$ liefert:

$$\int_0^b x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^b -x^2 e^{-x^2}(-2x)dx = \frac{1}{2}\int_{z(0)}^{z(b)} z e^z dz \overset{par.Int.}{=} \Big[\frac{1}{2} z e^z\Big]_{z(0)}^{z(b)} - \frac{1}{2}\int_{z(0)}^{z(b)} e^z dz$$

$$= \Big[\frac{1}{2}e^z(z-1)\Big]_{z(0)}^{z(b)} = \Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)\Big]_0^b = -\frac{1}{2}e^{-b^2}(b^2+1) + \frac{1}{2}$$

Zusammen erhält man dann

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{2}e^{-b^2}(b^2+1) + \frac{1}{2}) = \lim_{b\to\infty}(\frac{1}{2}(-\frac{b^2+1}{e^{b^2}} + 1)).$$

Mit L'Hospital für

$$\lim_{b\to\infty}(\frac{b^2+1}{e^{b^2}}) = \lim_{b\to\infty}(\frac{2b}{2be^{b^2}}) = 0 \qquad \text{ergibt sich schließlich} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Mit $T = 2$ erhält man $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$.
Die a_n verschwinden, da die Funktion f ungerade ist.
Die b_n berechnet man durch:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx = \int_0^2 f(x)\sin(n\pi x)dx = \int_{-1}^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \\
&= \int_{-1}^0 f(x)\sin(n\pi x)dx + \int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx \\
&= \int_{-1}^0 \sin(n\pi x)dx - \int_0^1 \sin(n\pi x)dx \\
&= \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 \\
&= \frac{-1}{n\pi} + \frac{\cos(-n\pi)}{n\pi} + \frac{\cos(n\pi)}{n\pi} - \frac{1}{n\pi} = \frac{-2}{n\pi} + \frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{-2}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} \\
&= \frac{2}{n\pi}\Big((-1)^n - 1\Big)
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von f lautet:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1)\sin(n\pi x) \\
&= -\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left((2k+1)\pi x\right)}{2k+1}
\end{aligned}$$