TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS03
Fakultät II - Institut für Mathematik
Felsner / Grigorieff / Penn–Karras
Abel / Bohle / Peters

Lösungsskizzen zur Oktober - Klausur
Analysis I für Ingenieure

<u>Rechenteil</u>

1. Aufgabe (7 Punkte)

Wir zeigen die angegebene Formel mittels Induktion über $n \geq 1$:

Induktionsanfang: die Aussage ist richtig für $n = 1$;

Induktionsvoraussetzung: die Aussage sei wahr für ein natürliches $n \geq 1$;

Induktionsschluss $n \to n+1$*:* $1 + (n+1)x = 1 + nx + x \overset{IV}{\leq} (1+x)^n + x$
$\leq (1+x)^n + x(1+x)^n = (1+x)^{n+1}$,

d.h. die Aussage ist auch für $n+1$ wahr.

2. Aufgabe (7 Punkte)

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(2x^2)-1}{x^2} \overset{l'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\exp(2x^2)\cdot 4x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} 2\exp(2x^2) = 2.$

(b) f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ stetig (als Bruch elementarer stetiger Funktionen).
An der Stelle $x = 0$ ist f nicht stetig, denn $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$.

3. Aufgabe (9 Punkte)

(a) Weil der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{i^n}{i^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|i|} = 1$ existiert, ist der Konvergenzradius der Reihe gleich 1.

(b) Die Reihe konvergiert absolut für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-3| < 1$ (absolute Konvergenz im Innern des Konvergenzkreises).
Die Reihe divergiert außerhalb des Konvergenzkreises, d.h. für $z \in \mathbb{C}$ mit

$|z-3| > 1$.
Auf dem Rand des Konvergenzkreises ist die Reihe ebenfalls divergent, denn: Angenommen, die Reihe konvergiere für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-3| = 1$. Dann wäre $(x_n)_n$, $x_n := i^n(z-3)^n$ — und somit auch $(|x_n|)_n$ — Nullfolge. Aber $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 1 \neq 0$. Widerspruch!

4. Aufgabe

(9 Punkte)

(a) $g'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} \cdot 2x = 2x(1 - \frac{1}{x^2})$, daher gilt $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ oder $x = 0$ oder $x = 1$.
Auf $]-\infty, -1] \cup]0, 1]$ besitzt g nichtpositive Ableitung und ist daher dort monoton fallend.
Auf $[-1, 0[\cup [1, \infty[$ besitzt g nichtnegative Ableitung und ist daher dort monoton wachsend.
Die Funktion g besitzt demnach lokales Minimum in $x = -1$ und $x = 1$, jedoch kein lokales Maximum (in $x = 0$ ist g nicht definiert!).

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$.
Es gibt also kein globales Maximum.
Das globale Minimum wird an den Stellen $x = -1$ und $x = 1$ angenommen.

5. Aufgabe

(9 Punkte)

(a) Das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 2$ lautet

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(2) + f'(2) \cdot (x-2) + \frac{f''(2)}{2} \cdot (x-2)^2 \\ &= 1 + \ln(2) + \frac{1}{2}(x-2) - \frac{1}{8}(x-2)^2. \end{aligned}$$

(b) Der Fehler $R_2(x)$ für $x \in [\frac{19}{10}, \frac{21}{10}]$ läßt sich mit Hilfe der Taylorformel wie folgt abschätzen:

$$|R_2(x)| = \left| \tfrac{f'''(\xi)}{3!} (x-2)^3 \right| = \tfrac{2}{\xi^3 \cdot 3!} |x-2|^3 \leq \tfrac{1}{3\,(19/10)^3 \cdot 10^3} = \tfrac{1}{3 \cdot 19^3},$$

ξ bezeichnet dabei eine Stelle zwischen x und 2.

Verständnisteil

6. Aufgabe (10 Punkte)

(1) Falsch. Gegenbsp.: $a_n = 1/n$ und $a = 1$. Anderes Gegenbsp.: $a_n = -n$ und $a = 0$.

(2) Falsch. Sie kann ihn erreichen (z.B. $a_n = a$). Sie kann beliebig nahe kommen und nicht konvergieren (z.B. $a_n = (-1)^n + 1/n$).

(3) Richtig. (Nach Definition.)

(4) Richtig. (Nach Definition.)

(5) Falsch. Gegenbsp: $a_k = (-1)^k 1/k^2$.

7. Aufgabe (9 Punkte)

(1) Mit der Formel für die Summe der Exponentialreihe gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{200^n}{(n+1)!} = \frac{1}{200} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{200^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{200} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200^n}{n!}$$
$$= \frac{1}{200} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{200^n}{n!} - 1 \Big) = \frac{1}{200} (\mathrm{e}^{200} - 1).$$

(2) $a_n = (-1)^n (2 + \frac{1}{\sqrt{n}})$, $n \geq 1$. Die Reihe divergiert, denn das notwendige Kriterium ist nicht erfüllt: $(a_n)_n$ ist keine Nullfolge (genauer: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 2 \neq -2 = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$).

(3) Mit der Formel für die Summe der geometrischen Reihe gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{9^n} = \frac{8}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{8}{9}\Big)^n = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{8}{9}} = 24.$$

8. Aufgabe

(6 Punkte)

Nach den Rechenregeln für Beträge gilt:

$$\begin{aligned}
|(2+i)(z-1)| \leq |1-2i| \qquad &\Leftrightarrow \\
|(2+i)|\,|(z-1)| \leq |1-2i| \qquad &\Leftrightarrow \\
\sqrt{5}|(z-1)| \leq \sqrt{5} \qquad &\Leftrightarrow \\
|(z-1)| \leq 1.&
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist also eine Kreisscheibe (mit Rand) vom Radius 1 mit Mittelpunkt 1.

9. Aufgabe

(9 Punkte)

(1) Falsch. Gegenbsp.: Die Funktion $f(x) = -(x-1/2)^2$ hat ein Maximum (bei $1/2$).

(2) Richtig.

(3) Falsch. Gegenbsp.: Die Funktion $f(x) = \sin(2\pi x)$ ist nicht monoton.

10. Aufgabe

(6 Punkte)

Für $x \in [-1, 1]$ gilt

$$1 \leq \exp(x^2) \leq \exp(1).$$

Damit gilt (siehe Satz aus Vorlesung):

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \exp(x^2)\,dx \leq 2\exp(1).$$