Februar – (Voll-) Klausur
Analysis I für Ingenieure

Lösungen

Rechenteil:

1. Aufgabe

Es sei $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und $f : I \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\sin|x|} & \text{für } x \in I\backslash\{0\} \\ 1 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

a) Für welche $x \in I$ ist f stetig?

b) Für welche $x \in I$ ist f differenzierbar? Geben Sie f' an.

Lösung

a) Als Quotient stetiger Funktionen ist f stetig auf $I\backslash\{0\}$. Weiter ist

$$\lim_{x\nearrow 0} \frac{x}{\sin|x|} = \lim_{x\nearrow 0} \frac{x}{-\sin x} = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{\sin|x|} = \lim_{x\searrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Daher ist f an der Stelle $x = 0$ nicht stetig.

b) Es ist

$$f(x) := \begin{cases} -\frac{x}{\sin x} & \text{für } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\\ \frac{x}{\sin x} & \text{für } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}.$$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar, da f dort nicht stetig ist. Auf $I\backslash\{0\}$ ist f differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) := \begin{cases} -\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} & \text{für } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\\ \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} & \text{für } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}.$$

2. Aufgabe

Es sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $a_0 = 2$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2a_n}, \quad n \geq 0,$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, untersuchen Sie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und bestimmen Sie gegebenenfalls $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Lösung

Aus

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2a_n} \geq \frac{a_n^2}{2a_n} = \frac{a_n}{2}$$

folgt mittels vollständiger Induktion sofort, dass alle $a_n > 0$ sind. Daher ist auch $a_n \geq 1$ für alle n, denn $a_0 = 2 \geq 1$ und

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+1}{2a_n} \geq 1 \iff a_n^2 + 1 \geq 2a_n \iff (a_n - 1)^2 \geq 0.$$

Also gilt

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2+1}{2a_n} - \frac{2a_n^2}{2a_n} = \frac{1-a_n^2}{2a_n} \leq 1,$$

und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend.
Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte monoton fallende Folge ist existiert $\lim_{n\to\infty} a_n =: a$.
Hieraus erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{a+1}{2a},$$

d.h. a erfüllt $a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = 0$.
Diese Gleichung hat die Lösungen $a_{1/2} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$, also $a \in \{-\frac{1}{2}, 1\}$.
Da aber $a_n > 0$ muss auch $a \geq 0$, also $a = 1$.

3. Aufgabe

Ist das Integral

$$\int_1^\infty \frac{1+\ln x}{x^x}\, dx$$

konvergent? Berechnen Sie gegebenenfalls seinen Wert.

Lösung

Mit der Substitution $u = x \ln x$, $\frac{du}{dx} = 1 + \ln x$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1+\ln x}{x^x}\, dx &= \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1+\ln x}{e^{x\ln x}}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{a\ln a} \frac{1}{e^u}\, du \\ &= \lim_{a\to\infty} \left[-e^{-u}\right]_0^{a\ln a} = \lim_{a\to\infty} \left(-e^{-a\ln a} + e^0\right) = 1\end{aligned}$$

4. Aufgabe

Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion

$$f(x) = x^2 + \sin(1 - x)$$

an der Stelle $x_0 = 1$ und berechnen Sie mit Hilfe des Taylorpolynoms den Funktionswert an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ näherungsweise. Schätzen Sie das Restglied $R_2(\frac{1}{2})$ ab.

Lösung

Wegen

$$f'(x) = 2x - \cos(1 - x) \quad \text{und} \quad f''(x) = 2 - \sin(1 - x)$$

ergibt sich das Taylorpolynom zu

$$\begin{aligned} T_2(x) &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{1!}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 = x^2 - x + 1. \end{aligned}$$

Daher ist $f(\frac{1}{2}) \approx (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$. Aus

$$f'''(x) = \cos(1 - x)$$

folgt für das Restglied

$$R_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\cos(1-\xi)}{48}.$$

Mit $\frac{1}{2} < \xi < 1$ ist also $|R_2(\frac{1}{2})| \leq \frac{1}{48}$.

Vollklausur – Rechenteil

5. Aufgabe

Berechnen Sie für die 2π-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die durch

$$f(x) := \frac{x}{2\pi}, \quad x \in]0, 2\pi],$$

gegeben ist, die Fourierkoeffizienten a_k und b_k.

Lösung

Für $k = 1, 2, \ldots$ ergibt sich mit partieller Integration

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\cos(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\cos(2k\pi)}{k^2} + \frac{2\pi\sin(2k\pi)}{k} - \frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{1}{k^2} + 0 - \frac{1}{k^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

und

$$b_k = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} x\sin(kx)\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\sin(2k\pi)}{k^2} - 2\pi\frac{\cos(2k\pi)}{k}\right) = -\frac{1}{k\pi}.$$

Weiter ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{2\pi} x\,dx = \frac{1}{2\pi^2}\frac{(2\pi)^2}{2} = 1.$$

6. Aufgabe

Berechnen Sie $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2}\ dx$.

Lösung

Partialbruchzerlegung: Nullstellen des Nenners sind 0 (doppelte Nullstelle) und -1.
Der Ansatz

$$\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$$

liefert die Gleichung

$$Ax(x_1) + B(x+1) + Cx^2 = x - 1,$$

und Koeffizientenvergleich liefert das LGS

$$\begin{array}{rcl} A + \quad C & = & 0 \\ A + B \quad & = & 1 \\ B \quad & = & -1. \end{array}$$

Daraus folgt sofort $A = 2$, $B = -1$, $C = -2$. Also

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x-1}{x^3+x^2}\ dx &= \int_1^2 \frac{2}{x}\ dx - \int_1^2 \frac{1}{x^2}\ dx - \int_1^2 \frac{2}{x+1}\ dx \\ &= [2\ln x]_1^2 + \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 - [2\ln(x+1)]_1^2 \\ &= 2(\ln 2 - \ln 1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) - 2(\ln 3 - \ln 2) \\ &= 4\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Verständnisteil:

1. Aufgabe

Eine Lösung der Gleichung

$$z^4 = -7 + 24i$$

ist $z_0 = 2 + i$. Geben Sie alle weiteren Lösungen an.

Lösung

Ist z eine Lösung, so ist wegen $(z \cdot i)^4 = z^4$ auch $z \cdot i$ eine Lösung. Daher sind die weiteren Lösungen durch

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 \cdot i = (2+i)i = -1 + 2i \\ z_2 &= z_1 \cdot i = (-1+2i)i = -2 - i \\ z_3 &= z_2 \cdot i = (-2-i)i = 1 - 2i \end{aligned}$$

gegeben.

2. Aufgabe

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) + \cos x}{\ln(x-1)}.$$

Kann er direkt mit der Regel von l'Hospital berechnet werden?

Lösung

Formales anwenden der Regel von l'Hospital liefert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) + \cos x}{\ln(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \sin x}{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x - 1 - (x^2-1)\sin x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \big(1 - 2x\sin x - (x^2-1)\cos x\big).$$

Der letzte Grenzwert existiert jedoch nicht, d.h. die Regel von l'Hospital kann nicht direkt angewandt werden.

Da der Cosinus beschränkt ist, erhält man

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1) + \cos x}{\ln(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Hier wurde die Regel von l'Hospital erst beim zweiten Gleichheitszeichen angewandt.

Vollklausur – Verständnisteil

3. Aufgabe

Entscheiden Sie im Folgenden jeweils ohne Begründung ob die Aussage wahr oder falsch ist. Dabei sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

	wahr	falsch
$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \int_1^\infty \lvert f(x)\rvert\, dx < \infty$		✓
$\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 2 \;\Rightarrow\; \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ existiert	✓	
$\int_a^b f(x)\, dx > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$		✓
$\int_a^b \lvert f(x)\rvert\, dx = 0 \;\Rightarrow\; f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$	✓	✓
$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx \Rightarrow f(x) = g(x)$ für alle $x \in [a,b]$		✓

(Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Jede Nichtbeantwortung wird mit null Punkten gewertet. Die Punktsumme wird zu null gesetzt falls sie negativ ist.)

4. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \arctan x - \ln(1 + x^2).$$

Zeigen Sie: Für $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ gilt $f(x) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2$.

Lösung

Wegen

$$f(1) = \arctan 1 - \ln(1 + 1) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

genügt es zu zeigen, dass f auf $[\frac{1}{2}, 1]$ monoton fallend ist. In der Tat, für $x \geq \frac{1}{2}$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{1 - 2x}{1 + x^2} \leq 0.$$

5. Aufgabe

Stellen Sie fest, ob die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + \sinh(x)$ umkehrbar ist. Falls dies der Fall ist, bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $y_0 = 1$.

Lösung

Es ist $f'(x) = 1 + \cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also ist f streng monoton wachsend und damit injektiv.

Surjektivität folgt aus $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ und der Stetigkeit von f.

Also ist f bijektiv und damit umkehrbar.

Die Ableitung der Umkehrfunktion ist für $y_0 = f(x_0)$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Es ist $x_0 = 0$, da $f(0) = 1 = y_0$, also

$$\left(f^{-1}(1)\right)' = \frac{1}{f'(0)}. = \frac{1}{1+\cosh(0)} = \frac{1}{2}.$$

6. Aufgabe

Es sei f ein trigonometrisches Polynom, d.h.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\bigl(a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\bigr), \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

und es sei $a_0 = 0$. Welchen Wert hat das Integral $\int_0^T f(x)\, dx$?

Lösung

Für $k = 1, 2, \dots$ gilt

$$\int_0^T \cos(k\omega x)\, dx = \left[\frac{1}{k\omega}\sin(k\omega x)\right]_0^T = \frac{1}{k\omega}\sin(2k\pi) = 0.$$

Analog gilt $\int_0^T \sin k\omega x\, dx = 0$. Also ist

$$\int_0^T f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^T \cos(k\omega x)\, dx + \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^T \sin(k\omega x)\, dx = 0.$$