Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Bärwolff, Grigorieff 19.07.04

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Analysis I für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

8 Punkte

Skizzieren Sie die folgenden Mengen.

(a) $M_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \quad y \geq (x-1)^2 \text{ und } y^2 + (x-1)^2 < 1\}$

(b) $M_b = \{z \in \mathbb{C} \big| \quad \mathrm{Re}(z) = |z|\}$

(c) $M_c = \{z \in \mathbb{C} \big| \quad |z - e^{i\frac{\pi}{4}}| \geq 2\}$

2. Aufgabe

7 Punkte

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz, unbestimmte Divergenz bzw. bestimmte Divergenz gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Bei konvergenten Folgen ist der Grenzwert zu bestimmen.

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}\cos(n\pi)$

(b) $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = (1 + \frac{2}{n+2})^{n+5}$

(c) $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})-1}$, für $n \geq 2$

3. Aufgabe

7 Punkte

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ eine Zahl und die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x) = \begin{cases} \cosh(x) & \text{für } x \leq 0 \\ \alpha \cos^2(x) & \text{für } x > 0 \end{cases}.$$

(a) Für welchen Wert des Parameters α ist f eine auf ganz $\mathbb{R}$ stetige Funktion?

(b) Kann die Funktion f für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ differenzierbar sein? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. Aufgabe

4 Punkte

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass es ein $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gibt mit

$$f(x)\sin(x) = f'(x)\cos(x).$$

(*Hinweis: Betrachten Sie die Funktion* $g(x) = f(x)\cos(x)$.)

5. Aufgabe

6 Punkte

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit Stammfunktion F. Berechnen Sie alle Stammfunktionen von

$$f(5x+3) + xf(x^2).$$

6. Aufgabe

8 Punkte

Sei die Funktion f gegeben als

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f eine gerade Funktion ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion f auf dem Intervall $[0, \infty[$ monoton ist.

(c) Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind.

	Richtig	Falsch
Die Funktion f besitzt auf $[0, \infty[$ ein globales Minimum.		
Die Funktion f besitzt auf $[0, \infty[$ ein globales Maximum.		

(Für jedes an der richtigen Stelle gesetzte Kreuz erhalten Sie einen Punkt. Für ein an der falschen Stelle gesetztes Kreuz wird ein Punkt abgezogen. Minimale Punktzahl des Aufgabenteils c) sind 0 Punkte.)

(d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f auf $\mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Abschätzung.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx \leq \frac{1}{2}$$

(f) Der Wert des Integrals ist $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{4}(4 - \pi)$. Geben Sie den Wert von $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$ an.