April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Induktionsanfang $n = 0$: $\quad 0 = 1 - \frac{3}{3} = 0.$

$$\begin{array}{lll}
\text{Induktionsvoraussetzung :} & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} & = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} \\
\text{Induktionsbehauptung :} & \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} & = 1 - \frac{2(n+1)+3}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}} \\
\text{Induktionsbeweis :} & \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{4k}{3^{k+1}} & = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{4k}{3^{k+1}} + \frac{4(n+1)}{3^{n+2}} = 1 - \frac{2n+3}{3^{n+1}} + \frac{4n+4}{3^{n+2}} \\
 & & = 1 - \frac{6n+9}{3^{n+2}} + \frac{4n+4}{3^{n+2}} \\
 & & = 1 - \frac{2n+5}{3^{n+2}}
\end{array}$$

Damit gilt die Formel für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Aufgabe 5 Punkte

$$\text{a) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{3}{1 + \frac{1}{n}} \right) = 1 + 3 = 4.$$

$$\text{b) } \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{\arctan\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{(n-1)^3} + \frac{4}{(1-\frac{1}{n})^3 \cdot \arctan\sqrt{n}} \right) = 0 + \frac{4}{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi}.$$

3. Aufgabe 7 Punkte

Für die Gleichung $z^2 - z + iz - i = 0$
erhält man mit der $p - q-$ Formel:
$z_{1;2} = \frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{i}$
$\sqrt{i}$:
$w^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ hat die Lösungen
$w_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ und $w_2 = -w_1$.
Und damit:
$z_{1;2} = \frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
$z_{1;2} = \frac{1}{2}(1-i) \pm \frac{1}{2}(1+i)$
Die Lösungen sind: $\quad z_1 = 1$ und $z_2 = -i$

4. Aufgabe 8 Punkte

1) Für $x < \frac{1}{2}$ gilt :
$$\begin{aligned} -3x &\leq 1-2x \\ -x &\leq 1 \\ x &\geq -1 \qquad \text{folglich} \qquad L_1 = \left[-1, \tfrac{1}{2}\right[. \end{aligned}$$

2) Für $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3}$:
$$\begin{aligned} -3x &\leq -1+2x \\ -5x &\leq -1 \\ x &\geq \tfrac{1}{5} \qquad \text{folglich} \qquad L_2 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}\right]. \end{aligned}$$

3) Für $\frac{2}{3} < x$ gilt :
$$\begin{aligned} 3x-4 &\leq -1+2x \\ x &\leq 3 \qquad \text{folglich} \qquad L_3 = \left]\tfrac{2}{3}, 3\right]. \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge erhält man: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-1, 3]$.

5. Aufgabe 6 Punkte

$f(t) = t^2(1 - \frac{4}{3}t)$, $\qquad f'(t) = 2t(1-2t)$
Es ist $f'(t) = 0$ für $t = 0$ und für $t = \frac{1}{2}$.
Man errechnet für die Funktionswerte (incl. Randpunkte!):
$f(-1) = \frac{7}{3}$, $f(0) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{12}$, $f(1) = -\frac{1}{3}$.
Kleinster Funktionswert ist $f(1) = -\frac{1}{3}$.
Größter Funktionswert ist $f(-1) = \frac{7}{3}$.

6. Aufgabe 8 Punkte

a) Die Substitution $t = x^2$ mit $dt = 2xdx$ und anschließende partielle Integration ergibt

$$\int x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int te^{-t}\,dt = \frac{1}{2}\left(-te^{-t} + \int e^{-t}\,dt\right) = -\frac{t+1}{2}e^{-t} + c = -\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + c.$$

.

b) Die Substitution $t = x^2$ mit $dt = 2xdx$ ergibt

$$\int \frac{2x^3}{x^2-4}\,dx = \int \frac{t}{t-4}\,dt = \int 1\,dt + \int \frac{4}{t-4}\,dt = t + 4\ln|t-4| + c = x^2 + 4\ln|x^2-4| + c.$$

Und damit

$$\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+4}\,dx = \left[x^2 + 4\ln|x^2-4|\right]_0^1 = 1 + 4\ln\frac{3}{4}.$$