April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 7 Punkte

$f(x) = x + \frac{1}{2}\cos x$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\sin(x) > 0.$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Folglich ist f streng monoton wachsend und daher auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar.

Die Gleichung $x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}$ hat die Lösung $x = 0$.
Folglich:

$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\sin 0} = 1.$

2. Aufgabe 5 Punkte
Es ist $f'(x) = -2^1\sin(2x),\;\; f''(x) = -2^2\cos(2x),\;\; f'''(x) = 2^3\sin(2x)$.

Es gilt die Abschätzung $|f^{(n)}(x)| \leq 2^n$

Folglich:
$|R_n(\frac{1}{2})| = |\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$

3. Aufgabe 7 Punkte
Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x & \text{für } x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} - \frac{1}{2}\cos x & \text{für } x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

ist differenzierbar für $x < \frac{\pi}{4}$: $f'(x) = \frac{1}{2}\cos x$ für $x < \frac{\pi}{4}$.

und differenzierbar für $x > \frac{\pi}{4}$: $f'(x) = \frac{1}{2}\sin x$ für $x > \frac{\pi}{4}$.

Es ist
$\lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x\searrow\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} - \frac{1}{2}\cos x) = \frac{3}{4}\sqrt{2},$
$\lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow\frac{\pi}{4}} (\frac{1}{2}\sin x) = \frac{1}{4}\sqrt{2},$
Folglich ist f für $x = \frac{\pi}{4}$ nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar.

4. Aufgabe 7 Punkte
a) $\frac{x^2}{(x^2-2)(x+1)} = \frac{A}{x+\sqrt{2}} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+1}$

b) $\frac{x^2-x}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$

c) $\frac{7x^2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$

5. Aufgabe 6 Punkte

Mittelwertsatz: Ist f auf $[a, b]$ stetig und auf $]a, b[$ differenzierbar, so existiert ein ξ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Für $f(x) = \ln x$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$

Nach dem MWS: $\frac{1}{\xi} = \frac{\ln e - \ln 1}{e-1} = \frac{1}{e-1}$.

Also ist für $f(x) = \ln x$ und $x \in [1, e]$ der Wert $\xi = e - 1$.

6. Aufgabe 8 Punkte

Wahr sind a), b), d), e), g), h).