TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 2005
Fakultät II - Mathematik 18.7.2005
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistenten: K. Bauer, C. Schultz

Musterlösung Juli-Vollklausur Rechenteil SS 2005
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Induktionsanfang: $n = 1$: $\sum_{k=1}^{1}(3k^2 - 3k + 1) = 3 - 3 + 1 = 1$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \geq 1$: $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt: $\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2 - 3k + 1) = (n + 1)^3$.
Induktionsbeweis: $\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2-3k+1) = \sum_{k=1}^{n}(3k^2-3k+1)+3(n+1)^2-3(n+1)+1 \overset{\mathbf{IV}}{=} n^3+3n^2+3n+1 = (n + 1)^3$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3n^2+4}}{n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{3+\frac{4}{n^2}}}{n(1+\frac{5}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{3+\frac{4}{n^2}}}{1+\frac{5}{n}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$.

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5+4ix}{(3i-4)x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{(3+4i)x+5}{(3i-4)x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(3+4i+\frac{5}{x})}{x(3i-4-\frac{7}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+4i+\frac{5}{x}}{3i-4-\frac{7}{x}} = \frac{3+4i}{3i-4}$
$= (-i)\frac{3i-4}{3i-4} = -i$.

c) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+2}{x^2+x-6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+4)+10}{(x-2)(x+3)} = \pm\infty$. Der Limes existiert also nicht.

d) Es gilt: $|\frac{1+i}{10}| = \frac{\sqrt{2}}{10} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{2}}{10})^n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{1+i}{10})^n = 0$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

a) Polynomdivison ergibt: $2x^3 - 8x^2 + 9x - 3 = 2x(x^2 - 4x + 4) + x - 3$. Damit erhalten wir: $\frac{2x^3-8x^2+9x-3}{x^2-4x+4} = 2x + \frac{x-3}{(x-2)^2} = 2x + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} = 2x + \frac{1}{x-2} - \frac{1}{(x-2)^2}$, wie man durch Koeffizientenvergleich leicht erkennt.

b) reell: $\frac{5x^2+4}{x^3+4x} = \frac{5x^2+4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{1}{x} + \frac{4x}{x^2+4}$.
komplex: $\frac{5x^2+4}{x^3+4x} = \frac{5x^2+4}{x(x-2i)(x+2i)} = \frac{A}{x} + \frac{D}{x-2i} + \frac{E}{x+2i} = \frac{1}{x} + \frac{2}{x-2i} + \frac{2}{x+2i}$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

a) $f'(x) = 2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2x\cos(x) - (2 - x^2)\sin(x) = x^2\sin(x)$.

b) $g'(x) = \frac{(e^x+1)e^x-e^{2x}}{(e^x+1)^2}\frac{e^x+1}{e^x} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$.

5. Aufgabe (6 Punkte)

a) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx \overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin(u)du = -2\cos(u)|_{\pi}^{2\pi} = -4$.

b) $\int \ln(x^2)dx = x\ln(x^2) - \int x2x\frac{1}{x^2}\,dx = x\ln(x^2) - \int 2\,dx = x\ln(x^2) - 2x + c$.

6. Aufgabe (8 Punkte)

$f'(x) = -e^{-x}\sin(x) + e^{-x}\cos(x) = e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$.
$f''(x) = -e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) + e^{-x}(-\sin(x) - \cos(x)) = -2e^{-x}\cos(x)$.
$f'''(x) = 2e^{-x}\cos(x) + 2e^{-x}\sin(x) = 2e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$.
$f(0) = 2, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -2$.
Damit lautet das Taylorpolynom 2. Grades von f: $T_2(f,0)(x) = 2 + x + \frac{-2}{2!}x^2 = 2 + x - x^2$.
Für den Fehler (Betrag des Restglieds) gilt wiederum:
$|R_2(f,0)(x)| = |\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3| = |\frac{2e^{-\xi}(\cos(\xi)+\sin(\xi))}{6}x^3| \leq \frac{4e^{\frac{1}{10}}}{6}(\frac{1}{10})^3 = \frac{e^{\frac{1}{10}}}{3}\frac{2}{1000} < \frac{1}{500}$.