TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SoSe 2005
Fakultät II - Mathematik 10.10.2005
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistenten: K. Bauer, C. Schultz

Musterlösung Oktober-Vollklausur Rechenteil SS 2005
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Induktionsanfang: $n = 1$: $f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \geq 1$: $f^{(n)}(x) = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.

Induktionsbehauptung: Dann gilt: $f^{(n+1)}(x) = \frac{2(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

Induktionsbeweis: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) \overset{\text{IV}}{=} \left(\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = \frac{2(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt: $f'(x) = -e^{1-x}$, $f''(x) = e^{1-x}$, $f'''(x) = -e^{1-x}$, $f^{(4)}(x) = e^{1-x}$.
Also bekommen wir: $f(0) = e$, $f'(0) = -e$, $f''(0) = e$, $f'''(0) = -e$.
Damit lautet das Taylorpolynom mit Restglied: $f(x) = e - ex + \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{6}x^3 + \frac{1}{24}e^{1-\xi}x^4$, $\quad |\xi| < |x|$.

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx \overset{t=1+x^2}{=} \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + c = \ln(1+x^2) + c$.

b) $\int \frac{\ln x}{x}dx \overset{t=\ln x}{=} \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + c = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c$.

c) $\int x\,e^{x^2}dx \overset{t=x^2}{=} \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2} + c$.

d) $\int \cos x\,e^x dx = \sin x\,e^x - \int \sin x\,e^x dx = \sin x\,e^x + \cos x\,e^x - \int \cos x\,e^x dx$
$\Rightarrow \int \cos x\,e^x dx = \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) + c$.

e) $\int \frac{3}{(x^2+6x+9)^2}\,dx = \int \frac{3}{(x+3)^4}\,dx = -\frac{1}{(x+3)^3} + c$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Es gilt: $\frac{2+4i}{3+i} = \frac{(2+4i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{10+10i}{10} = 1 + i = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$.
Also bekommen wir: $\left(\frac{2+4i}{3+i}\right)^{2006} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{2006} = 2^{1003}e^{\frac{2006\pi}{4}i} = 2^{1003}e^{(500+\frac{3}{2})\pi i} = 2^{1003}e^{\frac{3}{2}\pi i}$
$= -2^{1003}i$.

5. Aufgabe (8 Punkte)

Die Funktion f ist ungerade, also sind alle $a_k = 0$. Für die b_k gilt:
$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)dx = -\frac{2}{k\pi}\cos(kx)|_0^{\pi}$
$= -\frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1)$.
Also bekommen wir als Foureirreihe: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k\pi}(1-(-1)^k)\sin(kx) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)\pi}\sin((2k-1)x)$.