TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN — SoSe 2005
Fakultät II - Mathematik — 10.10.2005
Dozenten: Prof. Dr. G. Bärwolff, Prof. Dr. F. Tröltzsch
Assistenten: K. Bauer, C. Schultz

Musterlösung Oktober-Vollklausur Verständnisteil SS 2005
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

- Es gilt: $\frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x-3$ und $\lim_{x\to 2} x-3 = -1$. Damit ist die (sonst sowieso stetige) Funktion f auch im Punkt $x=2$ stetig.
- Für g gilt aber: $\lim_{x\searrow 2} \frac{|x^2-5x+6|}{x-2} = \lim_{x\searrow 2} \frac{|x-2||x-3|}{x-2} = \lim_{x\searrow 2} \frac{(x-2)|x-3|}{x-2}$
$= \lim_{x\searrow 2} |x-3| = 1$.
Die Funktion g ist wegen $g(2) = -1$ somit zwar fuer alle $x \neq 2$ stetig, im Punkt $x=2$ jedoch unstetig.

2. Aufgabe (5 Punkte)

$\int_a^b f(x)dx \overset{x=a+b-t}{=} \int_b^a f(b+a-t)(-dt) = -\int_b^a f(b+a-t)dt = \int_a^b f(b+a-t)dt = \int_a^b f(b+a-x)dx.$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Mittelwertsatz: Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbar, dann gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.
In unserem Fall ist $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=2$ und aus $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{4}{2} = 2 = 2\xi = f'(\xi)$
ergibt sich $\xi = 1$. (Skizze).

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2n+3n^2}{5n^3+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3(\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n})}{n^3(5+\frac{4}{n^3})} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n}}{5+\frac{4}{n^3}} = \frac{0}{5} = 0.$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2n-1}\right)^2 \overset{x^2 \text{ stetig}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-1}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(2-\frac{1}{n})}\right)^2 = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}\right)^2$
$= \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}.$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{5}{n}\right)^8 \overset{x^8 \text{ stetig}}{=} \left(\lim_{n\to\infty} 1+\frac{5}{n}\right)^8 = 1^8 = 1.$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^6}{(2n^2-n+1)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^6(2+\frac{1}{n})^6}{n^6(2-\frac{1}{n}n+\frac{1}{n^2})^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2+\frac{1}{n})^6}{(2-\frac{1}{n}n+\frac{1}{n^2})^3} \overset{x^6,x^3 \text{ stetig}}{=} \frac{2^6}{2^3}$
$= 2^3 = 8.$

5. Aufgabe (9 Punkte)

a) $\frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{x-3}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$

b) $\frac{x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$
oder: $\frac{x+1}{x^3+x^2+x} = \frac{x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}} + \frac{C}{x+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}}.$

c) $\frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x^2-4)} = \frac{x^4-5x^3-30x^2-36x}{(x+1)^3(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x+2} + \frac{E}{x-2}.$