Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 10 Punkte

a) Es ist

$f(0) = -\arctan\frac{1}{3} < 0,$

$f(1) = 2 - \arctan\frac{1}{4} > 2 - \frac{\pi}{2} > 0.$ (denn $-\arctan\frac{1}{4} > -\frac{\pi}{2}$)

Da f stetig ist, existiert ein $x_0 \in]0,1[$ mit $f(x_0) = 0$.

b) Wegen $f'(x) = 2 - \frac{-\frac{1}{(x+3)^2}}{1+\left(\frac{1}{x+3}\right)^2} > 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ist f streng monoton auf $\mathbb{R}$.

Da f streng monoton ist auf $]0,1[$, gibt es ausser x_0 keine weitere Nullstelle in $]0,1[$.

2. Aufgabe 9 Punkte

Es ist $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$,
d.h. f ist streng monoton und daher umkehrbar.
Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:
$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(x_0)}$ mit x_0 Lösung von $2x_0 + \cos x_0 = 1$.
Man erhält: $x_0 = 0$ und $\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$.

3. Aufgabe 9 Punkte

a) Es ist $(x^3-1):(x-1) = x^2+x+1$ und $x^2-1 = (x-1)(x+1)$.

Folglich

$$\frac{1}{(x^3-1)(x^2-1)} = \frac{1}{(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{Dx+E}{x^2+x+1}$$

b) $$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

c) $$\frac{x^2-x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

4. Aufgabe 12 Punkte

Wahr sind b), d) und f).