1. Aufgabe 7 Punkte

April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

Die Funktion ist gerade, folglich:

$b_k = 0,\ k = 1,2,3,...$ und $a_k = \frac{4}{T} \int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt$

Mit $T = 2\pi,\ \omega = \frac{2\pi}{T}$ erhält man:

$a_k = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} t \cos kt \, dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{k} \sin kt\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin kt \, dt$

$\quad = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos kt}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k^2}, \quad k = 1,2,3,...$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} t \, dt = \pi.$

2. Aufgabe 6 Punkte

1) Für $x \leq -2$ gilt :

$$\begin{aligned} -(x+2) &< 10 + (x-1) \\ -11 &< 2x \\ -\tfrac{11}{2} &< x \qquad \text{folglich} \qquad L_1 = \left]-\tfrac{11}{2}, -2\right]. \end{aligned}$$

2) Für $-2 < x \leq 1$:

$$\begin{aligned} x+2 &< 10 + (x-1) \\ 2 &< 9 \qquad \text{folglich} \qquad L_2 = \left]-2, 1\right]. \end{aligned}$$

3) Für $1 < x$ gilt :

$$\begin{aligned} x+2 &< 10 - (x-1) \\ x &< \tfrac{9}{2} \qquad \text{folglich} \qquad L_3 = \left]1, \tfrac{9}{2}\right[. \end{aligned}$$

Als Lösungsmenge erhält man: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = \left]-\frac{11}{2}, \frac{9}{2}\right[.$

3. Aufgabe 7 Punkte

$z_0 = -\frac{1}{i} = i$

$z^3 = -1 = e^{i\pi}$ hat die Lösungen

$z_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

$z_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1$

$z_3 = \cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$

4. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $f'(x) = \sin(1-x) - 2x$ und $f''(x) = -\cos(1-x) - 2$

Und damit erhält man das Taylorpolynom

$T_2(x) = -2(x-1) - \frac{3}{2}(x-1)^2$

und den Funktionswert

$f\left(\frac{3}{2}\right) \approx -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{11}{8}$

$\left|R_2\left(\frac{3}{2}\right)\right| = \left|\frac{-\sin(1-\theta)}{48}\right| \leq \frac{1}{48} \qquad (1 < \theta < \frac{3}{2})$

5. Aufgabe 7 Punkte

Es ist $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$.

$f'(x) > 0 \iff x \in]0, e[$

$f'(x) < 0 \iff x \in]e, \infty[$

$f'(x) = 0$ für $x = e$.

Damit gilt:

f ist streng monoton steigend für $x \in]0, e[$

und streng monoton fallend für $x \in]e, \infty[$

und folglich hat f ein lokales Maximum bei $x = e$.

Es ist $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} \ln x = -\infty$, folglich $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

und $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Folglich: Das lokale Maximum ist auch globales Maximum; ein globales Minimum existiert nicht.

6. Aufgabe 6 Punkte

a) Polynomdivision ergibt $t^3 : (t^2+1) = t - \frac{t}{t^2+1}$.
Man erhält:

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1}\,dt = \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\,dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(t^2+1)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2$$

b) Die Substitution $t = x^2 + 4$ mit $dt = 2xdx$ ergibt

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} + c = \sqrt{x^2+4} + c$$