Februar-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 5 Punkte

Es ist $f(x) = 1 + x - \frac{1}{2}\sin x$
und $f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\cos x \ > \ 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ streng monoton steigend und damit injektiv,
und es ist $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (da f stetig, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$).
Folglich ist f umkehrbar.
$1 = 1 + x - \frac{1}{2}\sin x$ hat die Lösung $x = 0$,
folglich ist $f^{-1}(1) = 0$.
$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}\cos 0} = 2.$

2. Aufgabe 7 Punkte

$f(x)$ ist in $x = 1$ differenzierbar, denn

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sqrt{1+h}-1}{h} - \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\sqrt{1+h} - 2 - h}{2h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+h}-1}}{4h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{1}{2}(1+h)^{-\frac{3}{2}}}{4} = -\frac{1}{8}$$

3. Aufgabe 9 Punkte

a) $\displaystyle\int_1^\infty x \cdot \sin\frac{1}{x}\, dx$ ist divergent,

denn $\lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{h\searrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \neq 0.$

b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \sqrt{x}}$ ist konvergent,

denn für $x \geq 1$ ist $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} < \frac{1}{x^2}$ und $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ ist konvergent.

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x \cdot \sin x}$ ist divergent,

denn für $x \in]0,1]$ ist $\frac{1}{x\cdot\sin x} > \frac{1}{x}$ und $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ ist divergent.

4. Aufgabe 5 Punkte

Fourierkoeffizienten $a_k = \frac{2}{T}\int\limits_0^T f(x)\cos(k\omega x)\,dx \quad k = 0, 1, 2, ...$

Mit $T = 2\pi$, $\omega = 1$, $k = 1$ hat man hier

$-\frac{1}{3} = a_1 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$

Folglich $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx \;=\; -\frac{\pi}{3}$

5. Aufgabe 8 Punkte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + (-2)^n}{3^n} = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} e^{in} = \lim\limits_{n\to\infty} (\cos n + i\sin n)$ existiert nicht.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(i \cdot \arctan\frac{n^2}{n+1}\right) = i \cdot \frac{\pi}{2}$

d) $|z_n| = |\frac{\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{2}}{4}|^n = \left(\sqrt{\frac{2}{16} + \frac{2}{16}}\right)^n = (\frac{1}{2})^n \longrightarrow 0$

folglich $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$

6. Aufgabe 6 Punkte

b) und d) sind wahr,
a), c), e), f) sind falsch.