April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen – Rechenteil

1. Aufgabe — 5 Punkte

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n}} = 1$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5} = 1, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \arctan\sqrt{n} = \frac{\pi}{2}, \quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n^2+5}{(n-5)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\frac{5}{n^2}}{(\frac{n-5}{n})^2} = 5.$

Folglich $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{5}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\pi}$

2. Aufgabe — 6 Punkte

Induktionsanfang $n=1$: $\quad f'(x) = -\frac{1}{(1-x)^2}\cdot(-1) = \frac{1!}{(1-x)^2}$.

Induktionsvoraussetzung: $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

Induktionsbehauptung: $f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$

Induktionsbeweis:
$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}\right)' = n!\cdot\frac{-(n+1)}{(1-x)^{n+2}}\cdot(-1) = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

Damit gilt die Formel für alle $n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$. .

3. Aufgabe — 7 Punkte

Man erhält für $x<1$:

$x+3 \leq x(x-1) \iff (x-1)^2 \geq 4 \iff x\leq -1$ oder $x\geq 3$

$L_1 =]-\infty,-1]$

und für $x>1$:

$x+3 \geq x(x-1) \iff (x-1)^2 \leq 4 \iff x\geq -1$ oder $x\leq 3$

$L_2 =]1,3]$

Die Lösungsmenge der Ungleichung ist somit $L =]-\infty,-1] \cup]1,3]$

4. Aufgabe — 8 Punkte

$f(x) = x^2+5x-5\arctan x$

$f'(x) = 2x+5-\frac{5}{1+x^2}, \qquad f''(x) = 2+\frac{10x}{(1+x^2)^2}.$

$f'(x)=0 \iff (2x+5)(1+x^2)-5=0 \iff x(2x^2+5x+2)=0$

Die Lösungen sind: (p-q-Formel) $x_1=-2,\ x_2=-\frac{1}{2}$ sowie $x_3=0$.

Es ist $f''(-2) = 2-\frac{20}{25}>0,\ f''(-\frac{1}{2}) = 2+\frac{-5}{(\frac{5}{4})^2}<0,\ f''(0)=2>0.$

Daher hat f in $x_1=-2$ und in $x_3=0$ lokale Minima und dazwischen in $x_2=-\frac{1}{2}$ ein lokales Maximum.

Weil $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ ist, existiert kein globales Maximum.

Es ist $f(0) = 0$ und $f(-2) = -6 - 5\arctan(-2) < 0$
$(\arctan(-2) \approx \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3})$
Somit ist das lokale Minimum in $x_1 = -2$ auch globales Minimum.

5. Aufgabe 6 Punkte

$f(x) = \sin x, \quad f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x$
Für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhält man damit
$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1.$
Das Taylorpolynom ist somit $T_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$.
Für $x \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$
erhält man für das Restglied $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$ mit $\xi \in [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$
die Abschätzung $|R_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}$.
Also für $n = 2$: $|R_2| \leq \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{10}\right)^3 < 10^{-3}$

6. Aufgabe 8 Punkte

a) Partielle Integration ($u = \ln x,\ u' = \frac{1}{x},\ v' = x,\ v = \frac{x^2}{2}$) ergibt:

$$\int_1^2 x \cdot \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}.$$

b) Mit der Substitution $\sqrt{x} = t,\ dx = 2t\, dt$ erhält man:

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\sqrt{b}} \frac{2t}{t + t^3}\, dt = 2 \cdot \lim_{b\to\infty} \int_1^{\sqrt{b}} \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

$$= 2 \cdot \lim_{b\to\infty} [\arctan t]_1^{\sqrt{b}} = 2 \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2}.$$