April-Vollklausur
Analysis I für Ingenieure
Lösungen - Verständnisteil

1. Aufgabe 6 Punkte

Für $x \neq 0$ ist $f'(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1}$

In $x = 0$ ist f nicht differenzierbar, da f dort nicht stetig ist,
denn $\lim\limits_{x \nearrow 0} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \neq f(0)$

2. Aufgabe 8 Punkte

a) $(1-i)^{12} = (\sqrt{2})^{12} \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 12} = 2^6 \cdot e^{-i3\pi} = -2^6$

b) $w = -z_0^4 = -(1-i)^4 = -(\sqrt{2})^4 \cdot e^{-i\frac{\pi}{4}\cdot 4} = 4.$

Mit z_0 ist auch $z_1 = -z_0$ eine Lösung;
und da das Polynom $p(z) = z^4 + 4$ nur reelle Koeffizienten hat, sind auch $\bar{z}_0$ und $\bar{z}_1$ Lösungen.
Lösungen sind also $1-i,\quad -1+i,\quad 1+i,\quad -1-i.$

3. Aufgabe 6 Punkte

Es ist $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$
also $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x).$
Deshalb erhält man für die Funktion $f(x) = 2 + \cos^2 x$
die Fourierreihe $\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$

4. Aufgabe 8 Punkte

a) $\frac{x}{(x+1)(x^2-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-\sqrt{2}} + \frac{C}{x+\sqrt{2}}$

b) $\frac{2x-1}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$

c) $\frac{x^3-x^2}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$

Hinweis: wegen $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ist $A = 0$

5. Aufgabe 5 Punkte

Die Punkte $x = -\frac{1}{2}$ und $x = \frac{3}{2}$ sind vom Entwicklungspunkt gleich weit entfernt. Da in einem dieser Punkte Konvergenz, im anderen Divergenz vorliegt, müssen das die Randpunkte des Konvergenzintervalls sein.
Der Konvergenzradius ist somit $r = 1$.
In den Punkten $x = 0,\ x = \frac{1}{2},\ x = 1$ ist die Reihe konvergent, denn alle drei Punkte liegen im Innern des Konvergenzintervalls.

6. Aufgabe 7 Punkte

b), und e) sind wahr,
a), c), d), f), g) sind falsch.