TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WiSe 2007/08
Fakultät II - Mathematik 18.2.2008
Dozenten: Bärwolff, Behrndt, Böse, Penn-Karras
Assistenten: Ammar, Bauer, Dhamo

Musterlösung Februar-Klausur Rechenteil WS 2007/08
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

-Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt: $3 \times 1^2 - 3 \times 1 + 1 = 1^3$

-Induktionsvoraussetzung: Die Aussage sei wahr für ein $n \geq 1$, d.h. $\sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) = n^3$.

-Induktionsbehauptung: Zu beweisen ist, dass $\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2 - 3k + 1) = (n+1)^3$.

Beweis:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(3k^2 - 3k + 1) &= \sum_{k=1}^{n}(3k^2 - 3k + 1) + 3(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 \\ &\overset{(IV)}{=} n^3 + 3n^2 + 6n + 3 - 3n - 3 + 1 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = (n+1)^3.\end{aligned}$$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Es gilt:

$$z = e^{\frac{i\pi}{2}}(\sqrt{2} - i\sqrt{2})^6 = e^{\frac{i\pi}{2}} 2^6 (\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})^6 = 2^6 e^{\frac{i\pi}{2}} e^{\frac{-6i\pi}{4}} = 2^6 e^{-i\pi} = -2^6.$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{(l'H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{(l'H)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Also ist f differenzierbar in $x = 0$ und $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

4. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt:

$$f''(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{und } f'''(x) = -\frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)}.$$

Daher ist

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 1, \quad f'''(0) = -1$$

und

$$T_3 f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

i) Mit Hilfe der Substitution $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$ erhalten wir:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int 2\sin t\cos t\,dt.$$

<u>Erste Variante</u>:

$$\int 2\sin t\cos t\,dt = \int \sin 2t\,dt = -\frac{1}{2}\cos(2t) + c = -\frac{1}{2}\cos(2\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

<u>Zweite Variante</u>:

$$\int 2\sin t\cos t\,dt = 2\int \sin t\sin' t\,dt = \sin^2 t + c = \sin^2(\sqrt{x}) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

<u>Dritte Variante</u>: (Mit partieller Integration)

$$\int 2\sin t\cos t\,dt = 2\sin^2 t - \int 2\sin t\cos t\,dt \Rightarrow \int 2\sin t\cos t\,dt = \sin^2 t + c = \sin^2(\sqrt{x}) + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

ii) a) Mittels doppelter partieller Integration erhalten wir:

$$\int_0^1 x^2 e^x\,dx = x^2 e^x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x e^x\,dx = e - 2xe^x\Big|_0^1 + 2\int_0^1 e^x\,dx = -e + 2(e-1) = e - 2.$$

b)

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{a\to+\infty}\int_1^a \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{-1}{2}x^{-2}\Big|_1^a = \frac{1}{2}.$$