TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN WS 2007/08
Fakultät II - Mathematik 7.4.2008
Dozenten: Bärwolff, Behrndt, Böse, Penn-Karras
Assistenten: Ammar, Bauer, Dhamo

Musterlösung April-Klausur Rechenteil WS 2007/08
Analysis I für Ingenieure

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Es gilt: $8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}+2k\pi i} = 8e^{i\pi(\frac{1}{2}+2k)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Also gilt:
$z^3 = 8i \Rightarrow z = 2e^{i\pi(\frac{1}{6}+\frac{2k}{3})}$. Also erhalten wir die drei Lösungen
$z_1 = 2e^{i\pi\frac{1}{6}}$, $z_2 = 2e^{i\pi\frac{5}{6}}$, $z_3 = 2e^{i\pi\frac{9}{6}}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

1. Weg: Untersuche f zunächst auf Stetigkeit: $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\searrow 0} x^2e^{\sin^2(x)} + c = c$. $\lim\limits_{x\nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\nearrow 0} 1 = 1 = f(0)$. Also ist f in $x=0$ genau dann stetig, wenn $c=1$ ist .
Untersuche nun die Differenzierbarkeit von f mit gewähltem $c=1$: $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x^2e^{\sin^2(x)}+1-1}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0} xe^{\sin^2(x)} = 0$. Weiter gilt: $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{1-1}{x-0} = 0$. Also ist f in $x=0$ differenzierbar mit $f'(0)=0$.

2. Weg: $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x^2e^{\sin^2(x)}+c-1}{x}$. Dieser Term kann nur konvergieren, wenn auch der Zähler gegen null strebt. Es gilt aber $\lim\limits_{x\searrow 0} x^2e^{\sin^2(x)}+c-1 = c-1$. Es muss also $c=1$ gewählt werden . Nun gilt: $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x^2e^{\sin^2(x)}+c-1}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} \frac{x^2e^{\sin^2(x)}}{x} = \lim\limits_{x\searrow 0} xe^{\sin^2(x)} = 0$. Ebenso gilt $\lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\nearrow 0} \frac{1-1}{x-0} = 0$. Also ist f in $x=0$ differenzierbar mit $f'(0)=0$.

3. Aufgabe (9 Punkte)

a) Es gilt: $f(x) = \cosh(3x) - \sinh(3x) = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{2} - \frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2} = e^{-3x}$.

b) Induktionsanfang: $k=0$: $f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-3x}$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(x) = (-3)^k e^{-3x}$.
Induktionsbehauptung: Dann gilt auch $f^{(k+1)}(x) = (-3)^{k+1}e^{-3x}$.
Induktionsbeweis: $f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)})'(x) \overset{IV}{=} ((-3)^k e^{-3x})' = (-3)^{k+1}e^{-3x}$.

c) $T_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-3)^k}{k!}x^k$.

4. Aufgabe (10 Punkte)

a) $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \Rightarrow A=-1,\ B=2,\ C=0.$
$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}\,dx = \int_1^2 -\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\,dx = -\ln(x) + \ln(x^2+1)|_1^2 = -\ln(2)+\ln(5)-\ln(2) = \ln(\frac{5}{4})$.

b) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \ln^2(x)|_1^e - \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx \Rightarrow \int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2(x)|_1^e = \frac{1}{2}$.

5. Aufgabe (5 Punkte)

Mit L'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x\sin(3x)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\sin(3x)+3x\cos(3x)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos(x)}{3\cos(3x)+3\cos(3x)-9x\sin(3x)} = -\frac{1}{6}$.